

# РАСЧЕТ ПЬЕЗОЭЛЕМЕНТОВ КВАРЦЕВЫХ РЕЗОНАТОРОВ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

**П**рогресс в ряде областей радиоэлектроники и приборостроения неразрывно связан с уровнем производства пьезоэлектрических приборов. Эти устройства в настоящее время широко применяются в производстве измерительной, микропроцессорной и радиоэлектронной аппаратуры, что объясняется сочетанием высокостабильных свойств их кристаллической структуры с возможностью (благодаря пьезоэлектрическому эффекту) преобразования механических колебаний в электрические и наоборот.

Наибольшее распространение в качестве основных элементов в устройствах стабилизации частоты и широкополосных фильтрах получили кварцевые резонаторы. Ниже представлены результаты исследований в области математического моделирования механических элементов радиоэлектронных систем, начатые в рамках темы "Выбор численных методов спектрального анализа кварцевых резонаторов и динамический расчет ультразвуковых систем для их обработки".

Особенность математического моделирования кварцевых резонаторов связана как с геометрической формой и небольшими размерами самого пьезоэлемента, так и с необходимостью учета размера и формы электродов, количества и расположения узлов крепления пьезоэлемента, величины прямого и обратного пьезоэффектов.

Для расчета частотного спектра ограниченных по размерам пьезоэлектрических пластин разработано несколько теоретических положений, позволяющих получить решение для пьезоэлементов простой формы. Большинство из них основано на аппроксимации уравнений состояния пьезоэлектрика и разложении неизвестных величин в ряд. В работе [1] применено разложение в степенной ряд для чисто упругого случая. В работе [2] в решении задачи учтены пьезоэлектрические свойства и рассмотрены колебания с захватом энергии. Применение такого подхода к плоско-выпуклым пьезоэлементам описано в работе [3]. Некоторые вопросы применения метода конечных элементов изложены в работе [4].

Применение для расчета собственных колебаний кварцевых резонаторов метода конечных элементов (МКЭ) объясняется возможностью учета в широких пределах изменения геометрической формы и распределения толщины пьезоэлектрической пластины, перспективностью разработанных моделей и методов расчета для оптимизации проектирования резонаторов.

Конечный элемент, предложенный в работе [5], позволяет выделить из широкого и плотного спектра возбуждаемые переменным электрическим полем собственные частоты и формы колебаний сдвига по толщине, произвести их анализ с "захватом энергии" (энергия механических колебаний локализуется в подэлектродной области), учесть связь толщинно-сдвиговых и изгибных мод колебаний. Для сдвиговых колебаний принята линейная аппроксимация, для изгибных – квадратичная.

Предполагается, что по толщине элемента распределение перемещений происходит по синусоидальному закону:

$$u = \left( \sum_{i=1}^3 u_i L_i \right) \sin \frac{n\pi z}{t} + \left( \sum_{i=1}^3 \theta_{yi} L_i \right) z ; \quad (1)$$

$$v = \left( \sum_{i=1}^3 v_i L_i \right) \sin \frac{n\pi z}{t} + \left( \sum_{i=1}^3 \theta_{xi} L_i \right) z . \quad (2)$$

Так как напряженно-деформированное состояние резонатора описывается дифференциальным оператором второго

порядка, то задание на конечном элементе для перемещений в плоскости (линейные аппроксимации) и для изгибных (квадратичные аппроксимации) удовлетворяют условию полноты пространства базисных функций. Конечный элемент является совместным и решение сходится сверху к точному.

Собственные колебания резонатора описываются матричным уравнением:

$$[K(\vec{h}) - \lambda M(\vec{h})] \vec{y} = 0, \quad (3)$$

где  $\vec{y}$  – вектор обобщенных узловых перемещений  $\vec{h}$  – вектор толщин конечных элементов,  $K$  и  $M$  – глобальные матрицы жесткости и масс, получаемые суперпозицией матриц конечных элементов:

$$K = \sum_{i=1}^{N_{el}} K_i(\vec{h}) \quad \text{и} \quad M = \sum_{i=1}^{N_{el}} M_i(\vec{h}). \quad (4)$$

В настоящей работе для отыскания собственных значений и векторов системы (3) используется метод интегрирования в подпространстве, обладающий достаточно высокой скоростью сходимости и надежностью при рассмотрении плотного и кратного спектра частот. Особенность метода – применение в процессе обратных итераций одновременно нескольких нижних собственных чисел и векторов.

В качестве тестового был исследован плоский резонатор АТ-среза, экспериментальные данные для которого приведены в [6]. Результаты расчета резонансных частот (табл.1) хорошо согласуются с экспериментальными. Представляется, что небольшие погрешности обусловлены некоторым расхождением в значениях использованных в расчетах упругих констант.

Таблица 1. Результаты расчета резонансных частот

Частота	
Расчет	Эксперимент
7,5744	7,5425
7,6055	7,5696
22,6456	22,6284

В табл. 2 приведены расчетные значения резонансных частот основной гармоники и ближайших ангармоник для пяти вариантов кварцевых резонаторов, электроды которых выполнялись из серебра толщиной 0,2 мкм.

Вычисления производились при разбиении области вибратора на 288 элементов (765 степеней свободы). Глобальные матрицы жесткости и масс представлялись в профильном виде в соответствии со схемой Дженнинга, а расчетные значения частот хорошо согласовывались с полученными авторами экспериментальными данными.

Таблица 2. Расчетные значения резонансных частот основной гармоники и ближайших ангармоник

Вариант 1		Вариант 2		Вариант 3		Вариант 4		Вариант 5	
П, АТ, D=12,5, d=6, h=0,15		Пвск, АТ, D=8, d=3, R=250, h=0,16		ПВ, АТ, D=15, d=8, R=260, h=1,6		ПВ, АТ, D=15, R=157, h=1,22		ПВ, SC, D=15, R=175, h=1,1	
Тип	f, МГц	Тип	f, МГц	Тип	f, МГц	Тип	f, МГц	Тип	f, МГц
911	98,7392	111	10,4311	511	5,2186	511	4,9581	311	5,2736
912	98,7428	112	10,5880	512	5,2755	512	5,0420	312	5,3308
921	98,7436	121	10,6075	521	5,2822	521	5,0518	321	5,3655
913	98,7483	113	10,7621	513	5,3352	513	5,1325	313	5,3947
931	98,7515	131	10,8049	531	5,3494	531	5,1546	331	5,4191

Примечание: П – плоский; ПВ – плосковыпуклый; Пвск – плосковыпуклый со спрямленной кромкой; D – диаметр пьезоэлемента; d – диаметр электродов; R – радиус выпуклой поверхности; h – толщина в центре пьезоэлемента.

В целом следует отметить, что разработанная на базе специализированного конечного элемента математическая модель пьезоэлемента кварцевого резонатора и соответствующее программное обеспечение в дальнейшем могут эффективно использоваться для управления спектром собственных частот колебаний резонаторов [7], а также при оптимизации их проектирования по электроэнергетическим параметрам, добротности и надежности.

## ЛИТЕРАТУРА

1. R.D. Mindlin High frequency vibrations of piezoelectric crystal plates. – Int. J. Solids and Struct., 1972, v.8, №7, p. 895–906.
2. H.F. Tiersten Analysis of trapped energy resonators operating in overtones of coupled thickness shear and thickness twist vibrations. – J. Acoust. Soc. Amer., 1976, v.59, №4, p. 879–888.
3. S. Hertl, L. Wimmer, E. Beness Investigation of the amplitude distribution of АТ-cut quartz crystals. – J. Acoust. Soc. Amer., 1985, v.76, №4, p.1337–1343.
4. D.R. Cowdry, J.R. Willis Application of the finite element method to the vibrations of quartz plates. – J. Acoust. Soc. Amer., 1974, v.56, №1, p.94–98.
5. Тарануха А.А. Расчет и оптимизация элементов высокочастотной вибротехники: Автореф. дис. канд. техн. наук: 11.12.1993 – Харьков: ХПИ, 1993. – 24 с.
6. J. Kagawa, H. Arai. Finite element calculation of electromechanical resonators. – J. Sound and Vibr., 1975, v.39, №3.
7. Симсон Э.А., Тарануха А.А. Оптимизация формы кварцевых резонаторов. – Акустический журнал, 1993, т.39, №5.