УДК 621.396 DOI: 10.22184/NanoRus.2019.12.89.361.367

СОВРЕМЕННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ МОДЕЛИРОВАНИЯ ЭЛЕКТРОННЫХ СХЕМ В СИСТЕМЕ СХЕМОТЕХНИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ SIMONE

MODERN TECHNOLOGIES IN ELECTRONIC CIRCUIT SIMULATION RELEASED IN SIMONE CIRCUIT SIMULATOR

ПРИКОТА АЛЕКСАНДР ВАЛЕРЬЕВИЧ
prikota@eremex.com

БУБНОВ ВЛАДИСЛАВ ВЛАДИМИРОВИЧ

ООО ЭРЕМЕКС
198095, Санкт-Петербург, ул. Ивана Черных, 29А

PRIKOTA ALEXANDER V.
prikota@eremex.com

BUBNOV VLADISLAV V.

EREMEX LLC
29A Ivana Chernych St., St. Petersburg, 198095, Russia

Рассмотрены проблемы моделирования современных электронных схем большой размерности. Предложен метод ускорения процесса моделирования за счет использования декомпозиционного подхода к решению систем линейных алгебраических уравнений и использования технологий параллельных вычислений.
Ключевые слова: схемотехническое моделирование; SPICE; параллельные вычисления.
The paper cpnsiders the problems of large electronic circuits simulation. Methods of accelerating the simulation process by using the decomposition approach to solving systems of linear algebraic equations with using technologies of parallel computing have been proposed.
Keywords: circuit simulation; SPICE; parallel computation.

В настоящее время моделирование электронных схем стало неотъемлемой частью процесса разработки радиоэлектронной аппаратуры. Программы-симуляторы входят в состав всех современных систем схемотехнического проектирования и являются незаменимыми помощниками инженеров-электронщиков.

Среди существующих в мире компаний, занимающихся разработкой систем моделирования электронных схем, доминирующими являются американские компании — Synopsys, Cadence, Mentor Graphics.

Эти компании являются общепризнанными лидерами в разработке систем автоматизированного проектирования электронных устройств вообще, а применительно к проблемам схемотехнического моделирования их продукты содержат передовые на сегодняшний день решения. Программные решения указанных компаний позволяют осуществлять моделирование аналоговых, цифровых и аналого-цифровых схем.

В табл. 1. представлены наиболее известные системы моделирования различных типов электронных схем.

Все эти перечисленные программы моделирования имеют своим началом первый и наиболее известный симулятор электронных схем — программу SPICE.

SPICE (Simulation Program with Integrated Circuit Emphasis) был разработан в электронной исследовательской лаборатории Калифорнийского университета Беркли в начале 70-х годов XX века. Этот симулятор позволял проводить расчет широкого класса аналоговых, цифровых и цифроаналоговых электрических схем. Заложенные в нем функциональные возможности стали де-факто стандартом в моделировании электронных схем. Это относится, в частности, к таким аспектам, как:

- модели электронных компонентов, транзисторы, диоды, конденсаторы, резисторы, функциональные источники и т. п.;
- типы анализа схем

Таблица 1. Системы моделирования электронных схем

Фирма	Продукты
Моделирование интегральных схем	
Synopsys (США)	HSPICE, CustomSim, FineSim
Cadence Design Systems, Inc. (США)	Virtuoso Spectre
Mentor Graphics (США)	ELDO, AFS-Platform
Silvaco (США)	SmartSPICE
Моделирование электронных схем общего назначения	
Synopsys (США)	HSPICE
Cadence Design Systems, Inc. (США)	PSPICE AD
Mentor Graphics (США)	HyperLynx Analog
National Instruments (США)	MultiSim
Spectrum Software (США)	MicroCap
Linear Technology (США)	LTSPICE (бесплатн.)
Texas Instruments (США)	Tina-Ti (бесплатн.)
Моделирование ВЧ/СВЧ-схем	
Keysight EEsof (США)	ADS
National Instruments (США)	Microwave Office
CST (Германия)	CST MICROWAVE STUDIO
Моделирование целостности сигналов, цепей питания	
Cadence Design Systems, Inc. (США)	Sigrity
Mentor Graphics (США)	HyperLynx

- расчет по постоянному току;
- малосигнальный анализ,
- расчет переходных процессов,;
- расчет нелинейных искажений;
- и т. п.;

• численные алгоритмы:
  - методы численного интегрирования систем дифференциальных уравнений: трапеций, Гира и Эйлера;
  - метод Ньютона — Рафсона решения систем нелинейных алгебраических уравнений;
  - LU-разложение матрицы при решении системы линейных алгебраических уравнений;
  - алгоритмы управления точностью вычислений (reltol, abstol, pivrel, itl и проч.);
  - и т. п.

Моделирование схем в SPICE в свое время было признанно эталонным, поскольку обладало максимальной точностью и достоверностью. Обусловлено это было тем, что в алгоритмах не использовалось никаких упрощений — ни на этапе составления моделей, ни на этапе решения системы уравнений цепи. На основе программы SPICE впоследствии появляются первые коммерческие симуляторы — PSPICE, HSPICE и др.

Все современные симуляторы электронных схем поддерживают стандарты классического SPICE, дополняя и развивая их для соответствия нуждам современной радиоэлектронной промышленности.

Расчетные модули симуляторов составляют систему уравнений цепи на основе законов Кирхгофа и Ома с последующим ее решением для различных режимов работы схемы. Также для изучения определенных свойств схемы в том или ином виде анализа используются различные преобразования исходной системы с последующим решением преобразованных уравнений (пример — частотный анализ схем).

В процессе моделирования электронных схем актуальными являются следующие основные виды анализа.

1. Анализ по постоянному току. Поведение схемы в режиме постоянного тока описывается системой нелинейных алгебраических уравнений. Ее решение производится методом Ньютона, требующим на каждой итерации решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Количество итераций определяется сложностью и размерностью моделируемой схемы и может доходить до сотен для решения одной нелинейной системы.

2. Частотный анализ. Для построения частотных характеристик схемы необходимо решать СЛАУ с комплексными числами. Количество решений такой СЛАУ при изменении частоты определяется пользователем и в среднем составляет от нескольких сотен до десятков тысяч.

3. Временной анализ. Расчет переходных процессов схемы производится методами численного интегрирования систем дифференциальных уравнений. На каждом шаге численного интегрирования обычно требуется решить несколько СЛАУ. Количество шагов интегрирования исходной системы, как правило, варьируется от нескольких сотен до миллиона и более, а количество решений СЛАУ обычно варьируется от нескольких тысяч до миллионов.

4. Анализ устойчивости схемы включает в себя решение задачи нахождения определителя комплексной матрицы. Нахождение определителя по затратам и по реализации сравнимо с решением СЛАУ, а количество вычислений детерминанта в зависимости от сложности и размерности схемы может достигать десятков тысяч.

Указанные виды анализа схемы являются универсальными и применимы для моделирования широкого класса электронных схем. Для моделирования схем радиотехники, а также различных других беспроводных устройств, которые появлялись и получали все большее и быстрое распространение, актуальной становилась задача анализа периодических установившихся режимов нелинейных систем. Классические методы интегрирования дифференциальных уравнений плохо подходят для нахождения периодических режимов, и в конце прошлого века — начале нынешнего получили развитие новые математические методы и алгоритмы получения периодического решения уравнений цепи. К таким методам относятся:

1) Анализ периодических режимов пристрелочным методом Ньютона (Shooting Newton). Метод успешно справляется с сильно нелинейными задачами, но плохо применим для моделирования радиочастотных схем, в которых обычно присутствует сильный разброс частот. Также метод вызывает затруднения при наличии в схеме частотных компонентов, например фильтров, длинных линий, многополюсников. Для нахождения периодических режимов схемы применяется метод Ньютона, который предполагает решение нескольких систем линейных алгебраических уравнений с плотной матрицей чувствительностей размерностью, равной размерности матрицы системы. Применение прямых методов решения СЛАУ даже для сравнительно небольших схем становится нецелесообразным, поэтому стараются применять итерационные методы.

2) Анализ периодических режимов с помощью гармонического баланса (Harmonic Balance — HB) — нелинейного частотного метода для поиска установившихся режимов. Данный метод является основным методом моделирования и изучения радиочастотных или СВЧ-схем. На его основе построены расчетные модули всех современных систем моделирования ВЧ/СВЧ-устройств.

3) Многовариантные виды анализа схем. Включают в себя параметрический, статистический и температурный анализы схемы, в том числе многократные независимые запуски обычных видов анализа при изменении по указанным правилам параметров схемы или температуры. Поскольку эти расчеты запускаются независимо друг от друга, то данный вид расчета легко поддается распараллеливанию.

Стремительное развитие микроэлектроники, переход на субмикронные уровни приводит к существенному увеличению числа транзисторов в микросхемах и, как следствие, к росту размерности моделируемых схем. В то же самое время вычислительные алгоритмы SPICE-моделирования схем имеют существенные ограничения по скорости вычислений, и это связано с тем, что они имеют квадратичную зависимость от размерности моделируемой схемы. Эта зависимость обусловливает колоссальные временные затраты, которые необходимы для моделирования современных электронных схем, например больших и сверхбольших интегральных. Для моделирования таких схем вынужденно применяются так называемые Fast-SPICE-технологии. Они используют упрощения в моделях элементов и применяют вычислительные алгоритмы, снижающие точность расчетов. Это существенно повышает скорость моделирования, размерность схем, но часто приводит к существенному снижению достоверности моделирования, которая является определяющим фактором при разработке и верификации электронных схем.

Таким образом, насущной задачей является увеличение скорости моделирования без потери точности.

Авторы на протяжении нескольких лет занимались исследованием данной проблематики, и результатом этого исследования явились оригинальные реализации современных методов и технологий в системе схемотехнического моделирования SimOne компании «ЭРЕМЕКС» [1]. Основное направление исследований — это возможности использования современных численных методов линейной алгебры и технологий параллельных вычислений, таких как OpenMP, или GPU-ускорителей.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ СХЕМОТЕХНИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Для составления уравнений схемы на основе законов Кирхгофа и Ома симуляторы обычно используют либо метод узловых напряжений (МУН), либо определенные его модификации. В первом случае в качестве переменных состояния выступают узловые потенциалы цепи, во втором к ним могут быть добавлены токи компонентов, заряды емкостей, потокосцепления индуктивностей. Наиболее популярная модификация метода узловых напряжений называется модифицированным методом узловых напряжений (ММУН). В качестве расширенных переменных состояний он использует токи источников напряжений и индуктивностей. Метод хорошо себя зарекомендовал как устойчивый, обеспечивающий хорошую обусловленность матриц систем уравнений для широкого класса схем.

В общем случае электронная схема описывается нелинейной системой дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\frac{d}{dt}q\big(x(t)\big)+i\big(x(t)\big)+\int_{-\infty}^{t}h(t-\tau)x(\tau)d\tau=f(t). \qquad (1)$$

Здесь $x(t)\in R^N$ — вектор переменных состояния. В зависимости от способа формирования уравнений и применяемых математических моделей элементов в качестве переменных вектора состояний $x(t)$ могут выступать узловые потенциалы, напряжения на элементах, токи, заряды и потокосцепления;

$q\big(x(t)\big)\in R^N$ — нелинейный вектор зарядов емкостей и потокосцеплений индуктивностей;

$i\big(x(t)\big)\in R^N$ — нелинейный вектор токов схемных элементов;

$f(t)\in R^N$ — вектор значений независимых источников напряжения и тока;

$\int_{-\infty}^{t}h(t-\tau)x(\tau)d\tau\in R^N$ — вектор, содержащий интегралы свертки импульсных характеристик моделей компонентов с переменными вектора состояний. Как правило, импульсные характеристики компонентов изначально заданы в частотной области, поэтому первым шагом при составлении уравнений является их обращение во временную область.

Вектор $q\big(x(t)\big)$, как правило, содержит в себе нулевые компоненты. Системы уравнений с таким вектором производных называют либо вырожденными системами, либо системами дифференциально-алгебраических уравнений (ДАСУ).

Отметим также, что наличие в системе уравнений вектора интеграла сверток является характерным для моделирования радиочастотных и СВЧ-схем, поскольку модели высокочастотных компонентов задаются именно в виде частотных передаточных функций. Именно наличие этого члена в системе уравнений представляет существенные трудности для численных методов SPICE-симуляторов при построении временных процессов схемы, и это потребовало создания частотно-временных методов типа гармонического баланса и разработки целой методологии исследования свойств схем на его базе.

Численное моделирование электронных схем в SPICE разделяется на следующие основные виды.

АНАЛИЗ ПО ПОСТОЯННОМУ ТОКУ

Поведение схемы в режиме постоянного тока описывается следующей системой нелинейных алгебраических уравнений:

$$i(x)+h(0)x=f(0), \qquad (2)$$

где $f(0)\in R^N$ — фиксированные значения источников в момент времени t0. Решение системы (2) производится методом Ньютона, требующим на каждой итерации решения системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}&\big(G(x^k)+h(0)\big)dx^{k+1}=f(0)-i(x^k)-h(0)x^k\\&x^{k+1}=x^k+dx^{k+1}\end{aligned}, \qquad (3)$$

где $G(x^k)=\frac{\partial i(x)}{\partial x}$, $x=x^k$ — матрица малосигнальных параметров нелинейных элементов схемы.

Количество итераций метода определяется сложностью моделируемой схемы и выбором начального приближения решения. Для удачной сходимости метода необходимо иметь первое приближение как можно ближе к искомому решению, что, как правило, априори невозможно. Основным способом уточнения начального приближения является использование релаксационных методов, таких как метод пошагового увеличения значений источников напряжения и токов или метод пошагового уменьшения проводимостей ветвей схемы.

Практика показывает, что количество итераций метода Ньютона может варьироваться в пределах от нескольких в случае удачной сходимости до тысяч и больше в случае проблем со сходимостью.

ЧАСТОТНЫЙ АНАЛИЗ

При проведении данного вида анализа исходная система (1) линеаризуется в окрестности рабочей точки и преобразуется в частотную область. Полученная линейная система уравнений (4) решается для разных частот из интересующего диапазона построения частотных характеристик схемы:

$$\begin{aligned}&\big(j\omega C+G+H(j\omega)\big)x(j\omega)=f(j\omega)\\&j=\sqrt{-1},\end{aligned} \qquad (4)$$

$f(j\omega)$ — вектор комплексных амплитуд источников, $\omega\in[\omega_{min},\omega_{max}]$ — частота в заданном диапазоне.

Количество решений системы (4) определяется количеством точек внутри частотного диапазона построения частотных характеристик схемы. Как правило, это значение находится в пределах от нескольких сотен до нескольких тысяч.

АНАЛИЗ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

Для построения переходных процессов схемы используются численные методы интегрирования уравнения (1), такие как метод трапеций или Гира. На каждом шаге численного интегрирования исходная система дифференциальных уравнений заменяется системой алгебраических уравнений, для нахождения решений которой используется метод Ньютона. Решаемая на каждой итерации метода Ньютона система линейных уравнений в общем случае имеет следующий вид:

$$\left(\chi C(x^k)+G(x^k)+h(t^{k+1})x(0)(t^{k+1}-t^k)\right)x^{k+1}=w(x^k,x^{k-1},x^{k-2},..). \quad (5)$$

Здесь χ — параметр, зависящий от применяемого метода и от величины текущего шага интегрирования,

где $C(x^k)=\dfrac{\partial q(x)}{\partial x}$, $x=x^k$ — матрица производных нелинейных вектора зарядов и потокосцепления. Правая часть системы $w(x^k)$ нелинейно зависит от решений на предыдущих шагах интегрирования.

Количество шагов численного интегрирования исходной системы (1) может варьироваться от тысячи до миллиона и более. При этом на каждом шаге производится в среднем несколько итераций метода Ньютона и требуется решить несколько СЛАУ. Таким образом, общее количество итераций метода Ньютона при расчете переходных процессов доходит до нескольких десятков миллионов.

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ СХЕМЫ

Анализ устойчивости включает в себя решение задачи определения собственных значений пучка матриц, а также поиска корней полиномов, значения которых связаны с вычислением определителя пучка матриц:

$$P=Det\{pC+G\}, \quad (6)$$

где p — комплексное число.

Нахождение определителя по затратам и по реализации сравнимо с решением системы линейных уравнений. Число нахождений детерминанта определяется сложностью и размерностью моделируемой схемы и может достигать десятков тысяч.

АНАЛИЗ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ ПРИСТРЕЛОЧНЫМ МЕТОДОМ НЬЮТОНА

Нахождение периодических режимов схемы пристрелочным методом Ньютона (Shooting Newton) предполагает решение следующей исходной нелинейной системы уравнений:

$$x(T)-x(0)=0. \quad (7)$$

Это уравнение следует из самого условия периодического процесса: вектор переменных состояний схемы на границе периода T должен иметь то же значение, что и в начальный момент времени. Искомой переменной является вектор начальных состояний $x(0)$. Решение на границе периода, очевидно, есть функция от начального состояния:

$$x(T)=x(0)+\Psi\left(x(0),T\right). \quad (8)$$

Решение системы (7) с учетом (8) производится методом Ньютона и имеет следующий вид на текущей итерации:

$$\begin{aligned}&\left(J(x_0^k)+I\right)dx_0=x_0^k-\Psi(x_0^k,T)\\&x_0^{k+1}=x_0^k+dx_0,\end{aligned} \quad (9)$$

где I — единичная матрица, а $J(x_0^k)=\dfrac{\partial\Psi(x_0^k,T)}{\partial x_0^k}$ — матрица чувствительностей вектора переменных состояний на границе периода к начальному состоянию. Матрица $J(x_0^k)$ является плотной матрицей, и, следовательно, объем памяти для ее хранения квадратично зависит от размерности системы.

Учитывая кубическую сложность прямых методов решения систем уравнений, их применение для решения уравнений (9) становится нецелесообразным уже для средней величины схем, поэтому в последние десятилетия были предприняты серьезные попытки привлечения итерационных и проекционных методов решения систем линейных уравнений. Самым успешным на текущий момент опытом считается опыт использования методов подпространств Крылова. Для того чтобы избежать при этом больших затрат памяти, были разработаны специальные алгоритмы, позволяющие исключить использование матрицы чувствительности в явном виде [5].

АНАЛИЗ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ МЕТОДОМ ГАРМОНИЧЕСКОГО БАЛАНСА

В методе гармонического баланса искомое решение переменных состояний схемы аппроксимируется усеченным рядом Фурье

$$x(t)=\sum_{k=-K}^{K}X_k e^{jk\omega t}, \quad (10)$$

при этом все входные воздействия в схеме также аппроксимируются рядами Фурье. В этом случае исходная система уравнений (1) преобразуется к следующему виду:

$$F(X)=\Omega\Gamma q(\Gamma^{-1}X)+\Gamma i(\Gamma^{-1}X)+HX+\Gamma f=0, \quad (11)$$

где $\Gamma^{-1}X=\begin{bmatrix}x(t_1)\\ \dots\\ x(t_M)\end{bmatrix}$, $x(t_k)\in R^N$,

$$\Gamma^{-1}=\begin{bmatrix}e^{j\omega(-K)t_1}I_N & \dots & e^{j\omega Kt_1}I_N\\ \dots & \dots & \dots\\ e^{j\omega(-K)t_M}I_N & \dots & e^{j\omega Kt_M}I_N\end{bmatrix},$$

диагональная матрица $\Omega=\begin{bmatrix}j\omega(-K)I_N & \dots & 0\\ \dots & j\omega(-K+1)I_N & \dots\\ 0 & \dots & j\omega KI_N\end{bmatrix}$ —,

$H=\begin{bmatrix}H\left(j\omega(-K)\right) & \dots & 0\\ \dots & H\left(j\omega(-K+1)\right) & \dots\\ 0 & \dots & H(j\omega K)\end{bmatrix}$ — блочно-диагональная матрица, включающая в себя рассчитанные для набора частот матрицы передаточных функций моделей $H(j\omega k)$;

N — размерность исходной системы уравнений (1), $M=2K+1$ — количество временных отсчетов для вычисления преобразования Фурье Г, K — количество членов ряда Фурье, аппроксимирующего искомое решение

Таким образом, исходная дифференциально-алгебраическая система уравнений размерности N заменяется системой из NM алгебраических уравнений. Решается эта система методом Ньютона, очередная итерация l которого имеет следующий вид:

$$J(X^l)dX = -F(X^l)$$
$$X^{l+1} = X^l + dX. \qquad (12)$$

Матрица Якоби системы имеет размерность $NM \times NM$ и определяется следующим образом:

$$J(X^l) = \Omega \Gamma C(\Gamma^{-1} X^l)\Gamma^{-1} + \Gamma G(\Gamma^{-1} X^l)\Gamma^{-1} + H\,. \qquad (13)$$

Блочно-диагональные матрицы $C(\Gamma^{-1}X^l)$ и $G(\Gamma^{-1}X^l)$ также имеют размерность $NM \times NM$ и включают в себя на главной диагонали элементарные матрицы системы, определенные для заданных отсчетов по времени:

$$C_i = \frac{\partial q\big(x(t_i)\big)}{\partial x}, \quad G_i = \frac{\partial i\big(x(t_i)\big)}{\partial x}, \quad C(\Gamma^{-1}X^l) = \begin{bmatrix} C_1 & \dots & 0 \\ \dots & C_2 & \dots \\ 0 & \dots & C_M \end{bmatrix},$$
$$G(\Gamma^{-1}X^l) = \begin{bmatrix} G_1 & \dots & 0 \\ \dots & G_2 & \dots \\ 0 & \dots & G_M \end{bmatrix}.$$

Вычислительные проблемы, возникающие при решении системы (11) методом Ньютона, схожи с аналогичными проблемами, которые возникают при использовании пристрелочного метода Ньютона, и были описаны выше. Методы их решения также схожи и заключаются в использовании методов подпространств Крылова для решения системы уравнений на каждой итерации. Самым популярным методом из этого семейства является метод минимизации обобщенных невязок — GMRES, а наиболее эффективное его использование — с применением специально подобранных предобуславливателей.

ТЕХНОЛОГИИ УСКОРЕНИЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ СХЕМ

Как было показано в предыдущем разделе, основными вычислительными операциями в процессе моделирования являются расчет параметров моделей для очередных значений переменных состояния и решение системы линейных уравнений. Обе эти операции производятся на каждой итерации метода Ньютона. Ускорение проведения этих операций позволит ускорить все моделирование.

Расчет параметров каждой отдельной модели компонента не зависит от другой, поэтому самый простой способ ускорить расчет в этой части — производить эти вычисления параллельно. Другим способом могло бы быть упрощение моделей, например, с помощью табулирования нелинейностей, но это может ухудшить точность и привести к затруднениям сходимости метода Ньютона и, соответственно, увеличению числа итераций метода, а значит, и времени всего моделирования.

В качестве программной технологии параллельных вычислений для расчета параметров моделей авторами была использована технология OpenMP, реализующая многопоточность. Это позволило увеличить скорость расчета параметров моделей кратно числу ядер процессора компьютера.

Для решения системы линейных уравнений и вычисления определителя в SPICE используется LU-разложение исходной матрицы на верхне- и нижнетреугольные матрицы:

$$A = LU, \qquad (14)$$

$$L = \begin{pmatrix} l_{1,1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{2,1} & l_{2,2} & 0 & \dots & 0 \\ l_{3,1} & l_{3,2} & l_{3,3} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{n,1} & l_{n,2} & l_{n,3} & \dots & l_{n,n} \end{pmatrix}$$ — нижнетреугольная матрица,

$$U = \begin{pmatrix} 0 & u_{1,2} & u_{1,3} & \dots & u_{1,n} \\ 0 & 0 & u_{2,3} & \dots & u_{2,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{3,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$ — верхнетреугольная матрица.

В этом случае система линейных уравнений вида $Ax = b$ решается следующим образом:

$$LUx = b. \qquad (15)$$

Сначала система с нижнетреугольной матрицей:

$$Ly = b, \qquad (16)$$

после чего — с верхнетреугольной:

$$Ux = y, \qquad (17)$$

где y — вспомогательный вектор,

Определитель матрицы A равен произведению диагональных элементов матрицы L:

$$\mathrm{Det}(A) = \mathrm{Det}(L) = \prod_{i=1}^{n} l_{i,i}\,. \qquad (18)$$

Для того чтобы LU-разложение (14) было численно устойчиво, необходимо производить выбор ведущего элемента — обычно выбирают максимальный в строке или столбце.

Основная проблема применения LU-разложения для разреженных матриц — рост числа новых ненулевых элементов матрицы в процессе разложения. Если разложение идет с образованием большого количества новых ненулевых элементов, это вызывает существенное увеличение времени решения СЛАУ и требует больших объемов оперативной памяти. Для случая систем уравнений больших размерностей рост числа ненулевых элементов может иметь катастрофический результат для всего процесса моделирования.

Существуют различные эвристические методы, позволяющие минимизировать рост числа ненулевых элементов. Одним из наиболее употребляемых является алгоритм, построенный на выборе ведущего элемента разложения по правилу Марковица [3]. Сложность современных алгоритмов, реализующих LU-разложения с выбором ведущего элемента по правилу Марковица, оценивается в пределах $O(N^{1,8}) - O(N^2)$, где N — размерность матрицы системы, которая, в свою очередь, обычно равна сумме количества узлов в схеме и числа источников напряжений. Средним значением принято считать $O(N^{1,8})$,

Такая почти квадратичная зависимость алгоритмов делает неэффективным, а часто и невозможным использование SPICE-подобных симуляторов для моделирования больших и сверхбольших электронных схем.

Таким образом, для ускорения решения системы линейных алгебраических уравнений необходимо использовать более эффективные методы, среди них — прямые блочные методы, итерационные блочные методы, проекционные методы подпространств Крылова. Блочные методы наиболее эффективны для применения в классических видах SPICE-моделирования, тогда как проекционные — в методах гармонического баланса и пристрелочном методе Ньютона.

Среди прямых блочных методов решения систем линейных уравнений наиболее популярными являются метод приведения матрицы к блочно-треугольному виду — KLU и метод приведения исходной матрицы системы к блочно-окаймленному виду BBDF (14) с последующим применением к матрице принципа дополнения Шура [2]. Оба этих метода реализованы в системе моделирования электронных схем SimOne. В целом более эффективным авторам представляется BBDF-метод. Рассмотрим его подробнее.

Использование матрицы в блочно-окаймленном виде позволяет существенно снизить количество операций, необходимых для решения исходной системы за счет независимого решения малых систем с матрицами, являющимися диагональными блоками матрицы исходной системы.

$$\begin{bmatrix} A_1 & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} & B_1 \\ \mathbb{O} & A_2 & \cdots & \mathbb{O} & B_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \cdots & A_m & B_m \\ C_1 & C_2 & \cdots & C_m & Q \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \\ x_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \\ b_q \end{bmatrix}. \tag{19}$$

Здесь $\mathbb{O}$ — нулевой блок подходящей размерности. Диагональные блоки A_i квадратные с размерностями r_i, $i = 1...m$. Блок Q имеет размерность r_q. Блоки B_i и C_i имеют соответственно размерности $[r_i \times r_q]$ и $[r_q \times r_i]$.

Решение системы производится по формулам

$$H = Q - \sum_{i=1}^{m} C_i A_i^{-1} B_i \,, \tag{20}$$

$$\vartheta = b_q - \sum_{i=1}^{m} C_i A_i^{-1} b_i \,, \tag{21}$$

$$H x_n = \vartheta \,, \tag{22}$$

$$x_i = A_i^{-1}(b_i - B_i x_n) \,,\ i = 1\ldots m \,. \tag{23}$$

Определитель матрицы A находится по формуле

$$Det(A) = Det(H) \cdot \prod_{i=1}^{m} Det(A_i) \,. \tag{24}$$

Как видно, процесс решения системы (19) с блочно-окаймленной матрицей легко распараллеливается, это относится к обращению блоков A_i^{-1}, нахождению матричных произведений $C_i A_i^{-1} B_i$, произведений матриц на векторы $C_i A_i^{-1} b_i$, $A_i^{-1}(b_i - B_i x_n)$.

Использование технологий параллельных вычислений также позволяет существенно увеличить скорость решения СЛАУ на компьютерах с многоядерной архитектурой процессора и при использовании графических ускорителей GPU[4].

Алгоритм приведения исходной несимметричной разреженной матрицы к блочно-окаймленному виду предложен в работе Antonio Sangiovanni-Vincentelli [5].

В табл. 2 приведены результаты сравнений решения нескольких систем линейных уравнений из коллекции разреженных матриц [6] прямым методом LU-разложения (П) и с помощью приведения к блочно-окаймленному виду (Б).

Как видно из результатов, использование алгоритма позволяет на порядок ускорить процесс решения системы линейных уравнений.

Оригинальная программная реализация данного метода формирования BBDF-матрицы и последующего решения СЛАУ в системе моделирования электронных схем SimOne позволила получить существенное увеличение скорости моделирования больших схем в сравнении с обычными симуляторами.

В табл. 3 приведено время, затраченное разными программами на моделирование тестовых схем большой размерности. Данные схемы входят в набор тестовых схем компании IBM — IBM Power Grid Benchmarks и использовались в докладе на международной конференции DAC 2008 г. [6].

Тестирование проводилось на персональном компьютере IBM PC Intel Core i3 CPU 550 @ 3.20GHz RAM 16Gb Win7x64.

Результаты, приведенные в табл. 3, демонстрируют преимущество SimOne в скорости моделирования по отношению

Таблица 2. Решение систем линейных уравнений

Матрица	Размерность	Заполнение, %	Время решения, с		Ускорение, раз
			П	Б	
bcsstk34	588	6,36	0,372	0,070	5,1
msc01050	1050	2,74	3,965	0,113	35,2
bcsstm13	2003	0,59	0,551	0,202	2,72
c-18	2169	0,37	0,813	0,072	11,3
bcsstk24	3562	1,29	98,198	1,755	55,9
c-37	8204	0,12	29,038	3,571	8,13
sit100	10262	0,06	238,605	3,732	63,9
tuma2	12992	0,03	51,138	1,168	43,7
ncvxqp9	16554	0,02	62,203	4,176	14,9
rail_20209	20209	0,04	129,676	4,455	29,1
Dtoc	24993	0,01	7,817	1,506	5,2
ncvxbqp1	50000	0,02	8494,010	385,000	22,0

Таблица 3. Время моделирования больших электронных схем

Схема	Linear Technology LTSPICE IV	Cadence OrCad 16.5, PSPICE AD	Spectrum Software Micro-Cap 11	Altium Designer 16	SimOne 3.1	Synopsys HSPICE
Ibmpg1	3671.93с	75.47с	91.60с	43с	6.1с	8.27с
Ibmpg1t	4931.77с	540.05с	384.6с	Отказ	104.2с	52.76с
Ibmpg2	11090.27с	Ошибка чтения	1488.6с	2450.18с	87.2с	66.02с

к другим популярным программам моделирования. Исключение составляет симулятор HSPICE компании Synopsys.

Использование технологии параллельных вычислений OpenMP в SimOne позволило получить дополнительное к текущему ускорение процесса моделирование схем в среднем на 20–30%.

В настоящее время авторами ведутся исследования на предмет эффективного применения проекционных методов решения систем линейных уравнений. Это относится к таким видам расчета, как расчет периодических режимов методом гармонического баланса и пристрелочным методом Ньютона.

Исследованы наиболее популярные алгоритмы использования метода минимизации обобщенных невязок GMRES. Среди них:

- прямой GMRES,
- GMRES с частотным предобуславливанием,
- GMRES с временным предобуславливанием,
- GMRES со смешанным предобуславливанием.

Сильной стороной проекционных методов и метода GMRES, в частности, является то, что базовой операцией процедуры получения решения является умножение матрицы на вектор, которое удобно поддается распараллеливанию.

Перечисленные выше алгоритмы сейчас проходят активное тестирование и подготовку для включения их в систему моделирования электронных схем SimOne.

ЛИТЕРАТУРА

1. Эремекс. Инновационный подход к проектированию электроники. Доступно по адресу http://www.eda.eremex.ru/products/simone.
2. Najm F. M. *Circuit Simulation*. John Wiley & Sons, Inc. 2010.
3. Vladimirescu A. The Spice Book. — John Wiley & Sons, Inc. 1994.
4. Прикота А. В., Еремин А. С., Морозов А. В., Перов А. С. Аспекты схемотехнического моделирования с применением графических ускорителей — (CAD/CAM/PDM-2012). М. 2012. Р. 258–262.
5. Sangiovanni-Vincentelli A., Chen L.-K., Chua L. O. *An Efficient Heuristic Cluster Algorithm for Tearing Large Scale Networks* // IEEE Transactions on Circuits and Systems — 1977 — Vol. CAS24, № 12. — P. 709–717.
6. Tim Davis. The University of Florida Sparse Matrix Collection // http://www.cise.ufl.edu/research/sparse/matrices/index.html, 2013.