



Получено: 3.09.2021 г. | Принято: 25.12.2021 г. | DOI: <https://doi.org/10.22184/1993-8578.2022.15.5.272.289>

Научная статья

МЕТОД ПЕРЕНОРМИРОВКИ СЛУЧАЙНОЙ ТРЕХКОМПОНЕНТНОЙ СИСТЕМЫ: ДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЭФФЕКТИВНОЙ ФУНКЦИИ ВОСПРИИМЧИВОСТИ

О.П.Познанский¹, к.ф.-м.н., ORCID: 0000-0003-3279-0337 / opoznans@gmail.com

Аннотация. В данной работе мы исследовали динамические характеристики эффективной восприимчивости случайной трехкомпонентной системы. Мы показали, что в случае большого расхождения статических локальных восприимчивостей эффективные динамические свойства аналогичны двухкомпонентной системе. Если же статические коэффициенты локальных динамических восприимчивостей компонентов приближаются друг к другу, сохраняя различие релаксационных частей, то проявляются особенности трехкомпонентной системы. В этом случае эффективная активная часть восприимчивости имеет два плато, а релаксирующая часть демонстрирует два максимума. Амплитуды максимумов для релаксирующей части зависят от доминирующей компоненты. Также мы исследовали случай двойной перколяции, показав, что эффективные свойства могут существенно меняться два раза при вариации доли одного из компонентов. В первом случае изменение связано с созданием перколяционного кластера, построенного из компонента (2), второе изменение связано с выдавливанием компонентов (2) и (3) компонентом (1), который строит вторичный перколяционный кластер.

Ключевые слова: Полихроматическая перколяция, двойная перколяция, иерархическая модель, метод ренормализации, статическая и динамическая эффективная восприимчивость

Для цитирования: О.П. Познанский. Метод перенормировки случайной трехкомпонентной системы: динамические характеристики эффективной функции восприимчивости. НАНОИНДУСТРИЯ. 2022. Т. 15, № 5. С. 272-289. <https://doi.org/10.22184/1993-8578.2022.15.5.272.289>

Received: 3.09.2021 | Accepted: 25.12.2021 | DOI: <https://doi.org/10.22184/1993-8578.2022.15.5.272.289>

Original paper

METHOD OF RENORMALIZATION OF THE RANDOM THREE-COMPONENT SYSTEM: DYNAMIC CHARACTERISTICS OF THE EFFECTIVE SUSCEPTIBILITY FUNCTION

O.P.Posnansky¹, Cand. of Sci. (Physics and Mathematics), ORCID: 0000-0003-3279-0337 / opoznans@gmail.com

Abstract. In this work we investigated dynamic characteristics of the effective susceptibility of random three-component system. We have shown that in the case of large discrepancy of the static local susceptibilities effective dynamic properties are similar to the two-component system. If static coefficients of local dynamic susceptibilities of the components approach each other keeping relaxation parts different, then peculiarities of the three-component system

¹ Department of Cardiovascular Imaging, GCHI, University Hospital Wuerzburg, Wuerzburg, Germany / Department of Cardiovascular Imaging, GCHI, University Hospital Wuerzburg, Wuerzburg, Germany



become apparent. In this case the effective active part of the susceptibility possesses two plateaus and the relaxing part demonstrates two maximums. Amplitudes of the maximums for relaxing part depend on the dominating component. Also we investigated a case of double percolation showing that the effective properties can change two times during variation of the fraction of one of the components. In the first case the change is associated with creation of the percolation cluster built from the component (2), the second change is linked to the extrusion of the component (2) and (3) by the component (1) which builds a secondary percolation cluster.

Keywords: polychromatic percolation, double percolation, hierarchical model, renormalization method, static and dynamic effective susceptibility

For citation: O.P. Posnansky. Method of renormalization of the random three-component system: dynamic characteristics of the effective susceptibility function. NANOINDUSTRY. 2022. V. 15, no. 5. PP. 272–289. <https://doi.org/10.22184/1993-8578.2022.15.5.272.289>

ВВЕДЕНИЕ

Теория перколяции [1, 2] находит применение в таких различных областях исследований, как переходы металл-изолятор [3, 4], процессы гелеобразования [5], течение жидкости в пористых средах [6] и вязкоупругость [7–9]. Для моделирования этих разнообразных физических явлений, как правило, каждый элемент решетки, представляющей двухкомпонентную систему, случайным образом находится в одном из двух возможных состояний. Например, при обычной перколяции связей, связь является "черной" с вероятностью $p \in [0,1]$ или "белой" с вероятностью $q = 1 - p$.

Заллен [10] обобщил обычную двухкомпонентную задачу перколяции на многокомпонентную, которую он назвал полихроматической перколяцией и дал углубленное исследование ее характеристик. Физические свойства полихроматической перколяции были изучены Когутом и Стрэли [11], которые применили подходы двойной решетки и Монте-Карло в исследовании бикритической экспоненты проводимости. Позже Галли и др. [12] использовали моделирование конечных решеток и теорию эффективной среды для понимания проводимости неупорядоченных решеток, в которых присутствовало до четырех видов компонент. Впоследствии в работе Галли и др. [13] был представлен общий обзор проделанной к настоящему времени работы по полихроматическим перколяционным моделям. Развитые математические инструменты были успешно применены для объяснения экспериментов с прыжковой проводимостью [14–17], полидисперсных гранулированных материалов [18, 19], смесей натрий-аммиак и солей с переносом заряда [12, 13], высокотемпературной сверхпроводимости [20].

Мотивация проведения настоящей работы заключается в том, чтобы, во-первых, начать систематическое исследование свойств эффективной динамической восприимчивости

INTRODUCTION

Percolation theory [1, 2] has applications in such various research fields as metal-insulator transitions [3, 4], gelation processes [5], fluid flow in porous media [6], and viscoelasticity [7–9]. For the modeling of these diverse physical phenomena, as a rule every element of lattice representing a two-component system, is randomly assigned to be in one of two possible states. For example, in regular bond percolation, a bond is "black" with probability $p \in [0,1]$ "white" with probability $q = 1 - p$.

Zallen [10] generalized the conventional two-component percolation problem to a multi-component which he named polychromatic percolation and provided an in-depth study of its characteristics. Physical properties of polychromatic percolation were studied by Kogut and Straley [11] who applied dual lattice and Monte-Carlo approaches in the investigation of a bicritical exponent of conductivity. Later, Halley et al. [12] used finite-lattice simulations and effective medium theory to understand the conductivities of disordered lattices in which there were up to four species. Subsequently, Halley et al. [13] provided a general review of the work carried out so far on polychromatic percolation models. Developed mathematical tools have been successfully applied to explain experiments with hopping conductivity [14–17], polydisperse granula materials [18, 19], sodium-ammonia mixtures and charge-transfer salts [12, 13], high-temperature superconducting [20].

The motives for the current work are, first, to begin a systematic investigation of properties of effective dynamic susceptibility for the case of polychromatic percolation which can be expected ultimately to find a wide range of application in real multi-component systems of scientific and technical interest [30]. Second, we explore the idea of hierarchical averaging and renormalization in multi-component percolation and present results



для случая полихроматической перколяции, которая, как можно ожидать, в конечном итоге найдет широкое применение в реальных многокомпонентных системах, представляющих научный и технический интерес [30]. Во-вторых, мы исследуем идею иерархического усреднения и перенормировки в многокомпонентной перколяции и представим результаты для широкого диапазона концентраций составляющих компонентов.

В этой работе мы покажем, что эффективная динамическая восприимчивость случайной трехкомпонентной системы принципиально отличается от случая регулярной двухкомпонентной системы в нескольких важных отношениях. Это отличие можно объяснить с точки зрения микрогеометрии, а именно: в трехкомпонентных системах существуют два интерфейса. Помимо внешних поверхностей, существуют области, где все три компонента объединяются, влияя на динамику свойств эффективной восприимчивости.

Измерение эффективной динамической восприимчивости широко используется для характеристики сильно неупорядоченных композитных материалов и основано на соотношениях между макроскопическими свойствами и структурой на микроскопическом масштабе, соизмеримой с минимальной длиной неоднородности. Установление таких соотношений остается фундаментальной проблемой из-за отсутствия параметра возмущения. Впервые показано, что эффективная динамическая восприимчивость различает композиты с различной долей компонентов в широкополосном диапазоне частот. Наш подход позволяет интерпретировать измерения, объективно выбирая и моделируя наиболее значимые особенности параметров составляющих компонентов, что дает возможность предсказывать свойства метаматериалов.

ТЕОРИЯ

Иерархическая модель композита, состоящего из трех компонентов

Рассмотрим композит как трехкомпонентную случайную структуру, которая может быть отображена на двумерную (2D) квадратную решетку и исследована методами теории перколяции. Предположим, что каждая связь решетки окрашена в разные цвета: "черный" цвет с вероятностью p , "белый" с вероятностью q и "серый" с вероятностью r , представляющие компоненты композита и удовлетворяющие условию:

for a wide range of concentrations of constituent components.

In this work we will show that the effective dynamic susceptibility of the random three-component system is fundamentally different than for the case of the regular two-component system in several important respects. The difference can be explained from the point of view of microgeometry, namely, in three-component systems there are two interfaces analogous to the hull. In addition to the external surfaces, there are regions where all three components combine, affecting the dynamic of effective susceptibility properties.

Measuring effective dynamic susceptibility is widely used for characterizing highly disordered composite materials and based on relations between macroscopic properties and structure at the microscopic scale commensurate with the minimal length of the inhomogeneity. Establishing such relations remains a fundamental challenge due to lack of perturbation parameter. For the first time, we show that the effective dynamic susceptibility distinguishes between the composites with different fractions of components in a broadband frequency range. Our approach enables the interpretation of measurements by objectively selecting and modelling the most relevant features of parameters of constitutive components, and allows predicting properties of metamaterials.

THEORY

A hierarchical model of composite consisting of three components

We consider composite as a three component random structure which can be mapped onto two-dimensional (2D) square lattice and investigated by percolation theory methods. Assume that each bond of the lattice is coloured "black" with probability p , "white" with probability q , and "grey" with probability r , representing components of composite and satisfying the condition:

$$\begin{cases} p+q+r=1 \\ \tilde{D}(p,q,r): 0 \leq p \leq 1; 0 \leq q \leq 1; 0 \leq r \leq 1, \end{cases} \quad (1)$$

where $\tilde{D}(p, q, r)$ is a probability domain. Geometrically $\tilde{D}(p, q, r)$ depicts an equiangular polygon (triangle) and probabilities p , q , and r can be interpreted as components of a vector. Of note, the regular two-component composite in Eq.(1) is recovered if either p , q , or r is zero.

Physical properties of such material can be described by the generalized ternary local probability density function:



$$\left\{ \begin{array}{l} p+q+r=1 \\ \tilde{D}(p,q,r): 0 \leq p \leq 1; 0 \leq q \leq 1; 0 \leq r \leq 1 \end{array} \right. \quad (1)$$

где $\tilde{D}(p, q, r)$ – область вероятностей. Геометрически $D(p, q, r)$ изображает равносторонний многоугольник (треугольник), а вероятности p, q и r могут быть интерпретированы как компоненты вектора. Следует отметить, что регулярный двухкомпонентный композит в уравнении (1) восстанавливается, если либо p , либо q , или r равны нулю.

Физические свойства такого материала могут быть описаны обобщенной троичной локальной функцией плотности вероятности:

$$\rho(G_{(km)}^*) = p\delta(G_{(km)}^* - G^{(1)}) + q\delta(G_{(km)}^* - G^{(2)}) + r\delta(G_{(km)}^* - G^{(3)}), \quad (2)$$

где $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака. В уравнении (2) каждая связь связана с ближайшими соседними узлами (km) в решетках N внутренних и N_Γ контактных граничных узлов. Она может принадлежать либо компонентам (1), (2) или (3), характеризующимся физическими параметрами $G^{(1)}, G^{(2)}$ и $G^{(3)}$ соответственно.

Мы моделируем глобальные (или эффективные) свойства материала со случайно распределенными локальными свойствами в соответствии с методом ренормализационной группы в реальном пространстве, введенным Рейнольдсом и др. [21-23]. Итерационное преобразование обобщенной функции плотности вероятности уравнения (2) определяется как [8]:

$$\rho_{n+1}(G_{(k'm')}^*) = \int_E \prod_{\substack{k \neq m \\ k \in S \setminus S_\Gamma \\ m \in S}}^{k \neq m} (dG_{(km)}^* \rho_n(G_{(km)}^*)) \delta(G_{(k'm')}^* - \langle F(\{G_{(km),n}^*\}) \rangle), \quad (3)$$

где

$$E = \{E^{(1)} \cup E^{(2)} \cup E^{(3)}\}. \quad (4)$$

S это поверхность, охватывающая внутренние N узлы, N_Γ узлы на границе Γ , и $S \setminus S_\Gamma$ поверхность, где

узлы исключены. $\langle F(\{G_{(km),n}^*\}) \rangle$ – эффективная функ-

ция восприимчивости решетки, очерченная через базовый элемент, ограниченный узлами (km) , которая усреднялась по всем конфигурациям E таким образом, чтобы сохранить инвариантную форму уравнения (2) для каждого n -го масштаба рекурсивного построения иерархической решетки. В уравнении (4) множество E представляет собой объединение, \cup , соединенных, $E^{(1)}$ и $E^{(2)}$,

$$\rho(G_{(km)}^*) = p\delta(G_{(km)}^* - G^{(1)}) + q\delta(G_{(km)}^* - G^{(2)}) + r\delta(G_{(km)}^* - G^{(3)}), \quad (2)$$

where $\delta(x)$ is a Dirac delta function. In Eq.(2) every bond is bounded with the closest neighbor nodes (km) in the lattices of N inner and N_Γ contact boundary nodes. It can either belong to component (1), (2) or (3) characterized by physical parameters $G^{(1)}, G^{(2)}$ and $G^{(3)}$ correspondingly.

We model global (or effective) properties of a material with randomly distributed local properties according to a real space renormalization group method introduced by Reynolds et al. [21-23]. The iterative transformation of generalized probability density function of Eq.(2) is defined as [8]:

$$\rho_{n+1}(G_{(k'm')}^*) = \int_E \prod_{\substack{k \neq m \\ k \in S \setminus S_\Gamma \\ m \in S}}^{k \neq m} (dG_{(km)}^* \rho_n(G_{(km)}^*)) \delta(G_{(k'm')}^* - \langle F(\{G_{(km),n}^*\}) \rangle), \quad (3)$$

Where

$$E = \{E^{(1)} \cup E^{(2)} \cup E^{(3)}\}. \quad (4)$$

S is a surface covering N inner and N_Γ nodes on Γ boundary, and $S \setminus S_\Gamma$ is a surface where nodes N_Γ are

excluded. $\langle F(\{G_{(km),n}^*\}) \rangle$ is the effective susceptibility

function of a lattice, delineated via a basic element bounded by nodes (km) , which was averaged over all configurations E in a way to preserve the invariant form of Eq.(2) for every n^{th} scale of recursive building of hierarchical lattice. In Eq.(4) the set E is a unification, \cup , of connected, $E^{(1)}$ and $E^{(2)}$, and any (i.e. connected and disconnected), $E^{(3)}$, clusters. What can be noted is that the number of elements in a set E is equal $3^5 = 243$ for the renormalization unit self-dual cell presented in Fig.1a.

The transformation of p, q , and r in Eq.(3) corresponds to polynomial connectedness functions, $P(p, q, r), Q(p, q, r)$ and $R(p, q, r)$, where

$$P(p,q,r) = p^5 + 5p^4q + 5p^4r + 8p^3q^2 + 8p^3r^2 + 16p^3qr + 4p^2q^3 + 6p^2q^2r + 6p^2qr^2, \quad (5a)$$

$$Q(p,q,r) = q^5 + 5q^4p + 5q^4r + 6q^3p^2 + 8q^3r^2 + 6q^3pr + 10q^3pr + 2q^2r^3 + 4q^2p^2r + 6q^2pr^2, \quad (5b)$$

$$R(p,q,r) = r^5 + 5r^4p + 5r^4q + 8r^3p^2 + 8r^3q^2 + 20r^3pq + 2r^2p^3 + 2r^2q^3 + 24r^2p^2q + 24r^2p^2q + 4r^2p^2q + 4r^2p^2q + 4r^2p^2q + 4r^2p^2q + 20r^2p^2q^2 + 2p^2q^3 + 2p^3q^2, \quad (5c)$$



и любых (т.е. соединенных и несвязанных), $E^{(3)}$, кластеров. Можно отметить, что число элементов в множестве E равно $3^5=243$ для самодуальной ячейки-перенормировки, представленной на рис.1а.

Преобразование p , q и r в уравнении (3) соответствует полиномиальным функциям связности $P(p, q, r)$, $Q(p, q, r)$ и $R(p, q, r)$, где

$$P(p, q, r) = p^5 + 5p^4q + 5p^4r + 8p^3q^2 + 8p^3r^2 + 16p^3qr + 4p^2q^3 + 6p^2q^2r + 6p^2qr^2, \quad (5a)$$

$$Q(p, q, r) = q^5 + 5q^4p + 5q^4r + 6q^3p^2 + 8q^3r^2 + 6q^3pr + 10q^3qr + 2q^2r^3 + 4q^2p^2r + 6q^2pr^2, \quad (5b)$$

$$R(p, q, r) = r^5 + 5r^4p + 5r^4q + 8r^3p^2 + 8r^3q^2 + 20r^3pq + 2r^2p^3 + 2r^2q^3 + 24r^2p^2q + 24r^2p^2q + 4r p^3q + 4r pq^3 + 20r p^2q^2 + 2p^2q^3 + 2p^3q^2, \quad (5c)$$

если провести перенормировку части решетки, как на рис.1а.

Следует отметить, что сумма всех коэффициентов в уравнении (5) равна количеству элементов в множестве E . Таким образом, итерационная рекурсия набора параметров $\{p_n, q_n, r_n\}$ определяется как:

$$\begin{cases} p_{n+1} = P(p_n, q_n, r_n) \\ q_{n+1} = Q(p_n, q_n, r_n), \\ r_{n+1} = R(p_n, q_n, r_n) \end{cases} \quad (6)$$

и уравнение (3) после упрощения может быть записано как:

$$\begin{aligned} \rho_{n+1}(G_{(k'm')}^*) &= p_{n+1} \delta \left(G_{(k'm')}^* - \left\langle F \left(\left\{ G_{(km,n)}^* \right\} \right) \right\rangle^{(1),n+1} \right) + \\ &+ q_{n+1} \delta \left(G_{(k'm')}^* - \left\langle F \left(\left\{ G_{(km,n)}^* \right\} \right) \right\rangle^{(2),n+1} \right) + \\ &+ r_{n+1} \delta \left(G_{(k'm')}^* - \left\langle F \left(\left\{ G_{(km,n)}^* \right\} \right) \right\rangle^{(3),n+1} \right) \end{aligned}, \quad (7a)$$

где эффективная функция восприимчивости,

$\left\langle F \left(\left\{ G_{(km,n)}^* \right\} \right) \right\rangle$, разделяется на компоненты (1), (2)

и (3) в зависимости от связности связей во множестве E .

Решения уравнения (6) могут быть классифицированы на неустойчивые и устойчивые корни, (p_*, q_*, r_*) . Если возмущение входных параметров приводит впоследствии к одной из двух компонент, мы называем такие корни критическими

if we perform renormalization of a part of a lattice in Fig.1a.

Of note, the sum of all coefficients in Eq.(5) is equal to the number of elements in a set E . Thus the iterative recursion of a set of parameters $\{p_n, q_n, r_n\}$ is defined as

$$\begin{cases} p_{n+1} = P(p_n, q_n, r_n) \\ q_{n+1} = Q(p_n, q_n, r_n), \\ r_{n+1} = R(p_n, q_n, r_n) \end{cases} \quad (6)$$

and Eq.(3) after simplification can be written as

$$\begin{aligned} \rho_{n+1}(G_{(k'm')}^*) &= p_{n+1} \delta \left(G_{(k'm')}^* - \left\langle F \left(\left\{ G_{(km,n)}^* \right\} \right) \right\rangle^{(1),n+1} \right) + \\ &+ q_{n+1} \delta \left(G_{(k'm')}^* - \left\langle F \left(\left\{ G_{(km,n)}^* \right\} \right) \right\rangle^{(2),n+1} \right) + \\ &+ r_{n+1} \delta \left(G_{(k'm')}^* - \left\langle F \left(\left\{ G_{(km,n)}^* \right\} \right) \right\rangle^{(3),n+1} \right) \end{aligned}, \quad (7a)$$

where the effective susceptibility function,

$\left\langle F \left(\left\{ G_{(km,n)}^* \right\} \right) \right\rangle$, is separated into components (1), (2)

and (3) depending on the connectedness of bonds in set E .

Solutions of Eq.(6) can be classified by unstable and stable roots, (p_*, q_*, r_*) . If perturbation of input parameters leads subsequently to one of two components we term such roots as critical and unstable. In turn, if the same perturbation leads to one of three components we term these roots as unstable and bicritical. Stable roots represent a lattice fully occupied by one of the components (1), (2), or (3). Interestingly unstable critical points can be located on lines as well, separating probability domain on subregions. These lines can be described by equations in a parametric form:

$$\begin{cases} p - p_* = t_1 p_* \\ q = q_* \\ r - r_* = -t_1 r_* \end{cases}, \quad (7b)$$

$$\begin{cases} p - p_* = -t_2 p_* \\ q - q_* = t_2 q_* \\ r = r_* \end{cases}, \quad (7c)$$

where $t_1, t_2: \forall (p, q, r) \in \tilde{D}(p, q, r)$. The analysis of such peculiarities of Eq.(6) is carried out in the section Results of numerical simulations.

If we perform iterative recursion in Eqs.(3, 6) approaching $n \rightarrow \infty$, the three components become indistinguishable yielding a unification:

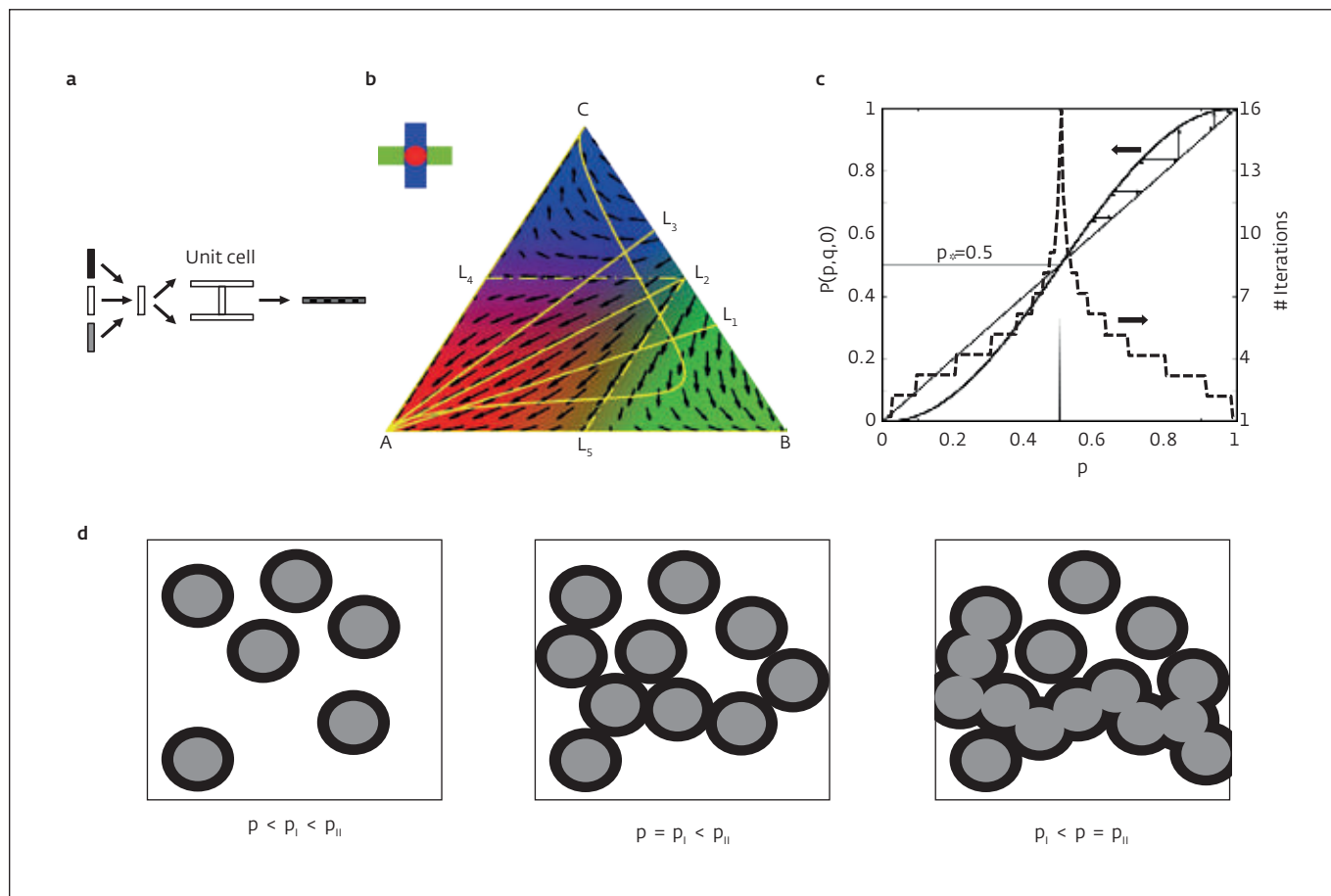


Рис.1. а. Каждая связь самодуальной перенормировочной элементарной ячейки может находиться в одном из трех состояний: "черном", "белом" или "сером". Все возможные конфигурации этих состояний на перенормировочной элементарной ячейке могут быть усреднены и заменены одной связью. б. Поток перенормировки (черные стрелки), построенный после первого шага итерации, и область вероятности (треугольник). Направление ренормализационного потока указывает на стабильные критические точки. Цветовое кодирование треугольника представляет перенормировку после первого шага итерации в соответствии с уравнением (6). Пунктирные линии, L_2L_4 и L_2L_5 , разделяют области, ведущие поток перенормировки к различным стабильным критическим точкам. Сплошные линии AB , AL_1 , AL_2 , AL_3 , AC и дуга представляют собой траектории начальных точек $p = (p_0, q_0, r_0)$ для численного расчета эффективных свойств. в. Кривая ренормализации $P(p, q, 0)$, соответствующая потоку вдоль AB (рис.1б) с возможными шагами итерации (тонкие линии со стрелками). Точки $P(0,0,0) = 0$ и $P(1, 0, 0) = 1$ устойчивы. Точка $P(p_*, (1 - p_*), 0) = p_*$ неустойчива. Те же кривые справедливы для $Q(0, q, r)$ и $R(p, 0, r)$ функций. Штриховые линии показывают количество итераций, проведенных для приближения к стабильным критическим точкам. д. Схематическая демонстрация явления двойной перколяции. Слева: покрытые оболочкой диски значительно разделены, и соединяющего кластера не наблюдается. Средняя: черные оболочки дисков генерируют первый соединительный кластер при $p = p_1$. Справа: серые диски генерируют второй соединяющий кластер при $p = p_{II}$, который доминирует над первым кластером.

Fig.1.a. Every bond of self-dual renormalization unit cell can be in one of three states, "black", "white" or "grey". All possible configurations of these states on a renormalization unite cell can be averaged and substituted by a single bond. б. Renormalization flux (black arrows) built after first step of iteration and probability domain (triangle). Direction of renormalization flux points on the stable critical points. Colour coding of triangle represents renormalization after first step of iteration according to Eq.(6). Dash-dot lines, L_2L_4 and L_2L_5 , separate regions leading renormalization flux to different stable critical points. Solid lines, AB , AL_1 , AL_2 , AL_3 , AC , and arc represent trajectories of initial points $p = (p_0, q_0, r_0)$ for numerical calculation of effective properties. в. Renormalization curve $P(p, q, 0)$ corresponding the flux along AB (Fig.1b) with possible iteration steps (thin lines with arrows). Points $P(0,0,0) = 0$ and $P(1, 0, 0) = 1$ are stable. Point $P(p_*, (1 - p_*), 0) = p_*$ is unstable. The same curves are valid for $Q(0, q, r)$ and $R(p, 0, r)$ functions. Dash lines represent the number of iterations carried out to approach stable critical points. д. Schematic demonstration of the double percolation phenomenon. Left: coated discs are significantly separated and connecting cluster is not observed. Middle: black shells of discs generate first connecting cluster at $p = p_1$. Right: grey discs generate second connecting cluster at $p = p_{II}$ which dominates the first cluster



и неустойчивыми. В свою очередь, если то же самое возмущение приводит к одной из трех компонент, мы называем эти корни неустойчивыми и бикритическими. Стабильные корни представляют собой решетку, полностью занятую одной из компонент (1), (2) или (3). Интересно, что неустойчивые критические точки также могут располагаться на линиях, разделяющих область вероятности на подобласти. Эти линии могут быть описаны уравнениями в параметрической форме:

$$\begin{cases} p - p_* = t_1 p_* \\ q = q_* \\ r - r_* = -t_1 r_* \end{cases}, \quad (7b)$$

$$\begin{cases} p - p_* = -t_2 p_* \\ q - q_* = t_2 q_* \\ r = r_* \end{cases}, \quad (7c)$$

где $t_1, t_2: \forall (p, q, r) \in \tilde{D}(p, q, r)$. Анализ таких особенностей уравнения (6) проводится в разделе "Результаты численного моделирования".

Если выполнить итерационную рекурсию в приближении уравнений (3, 6) достигая $n \rightarrow \infty$, то три компоненты становятся неразличимыми, что приводит к объединению:

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} (p_{n+1}, q_{n+1}, r_{n+1}) \Big|_{\forall (p_0, q_0, r_0) \in D_{(1,0,0)}} = \\ = (1, 0, 0), \lim_{n \rightarrow \infty} G^{(1),n} \Big|_{\forall (p_0, q_0, r_0) \in D_{(1,0,0)}} = G^{(eff)} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (p_{n+1}, q_{n+1}, r_{n+1}) \Big|_{\forall (p_0, q_0, r_0) \in D_{(0,1,0)}} = \\ = (0, 1, 0), \lim_{n \rightarrow \infty} G^{(2),n} \Big|_{\forall (p_0, q_0, r_0) \in D_{(0,1,0)}} = G^{(eff)} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (p_{n+1}, q_{n+1}, r_{n+1}) \Big|_{\forall (p_0, q_0, r_0) \in D_{(0,0,1)}} = \\ = (0, 0, 1), \lim_{n \rightarrow \infty} G^{(3),n} \Big|_{\forall (p_0, q_0, r_0) \in D_{(0,0,1)}} = G^{(eff)} \end{cases} \quad (8a)$$

и к сходимости троичных свойств уравнения (7a) к унарным

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n (G_{(km)}^*) \Big|_{\forall (p_0, q_0, r_0) \in D_{(p,q,r)}} = \delta (G_{(km)}^* - G^{(eff)}), \quad (8b)$$

с эффективными свойствами, соответствующими компоненту (1), (2) или (3) в зависимости от выбора начальной вероятности (p_0, q_0, r_0) на первом шаге итерации $n = 0$. Таким образом, область вероятности, $\tilde{D}(p, q, r)$, можно разделить на три области, где процесс перенормировки приводит к одному из соответствующих устойчивых корней:

$$D(p, q, r) = D_{(1,0,0)}(p, q, r) \cup D_{(0,1,0)}(p, q, r) \cup D_{(0,0,1)}(p, q, r), \quad (8c)$$

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} (p_{n+1}, q_{n+1}, r_{n+1}) \Big|_{\forall (p_0, q_0, r_0) \in D_{(1,0,0)}} = \\ = (1, 0, 0), \lim_{n \rightarrow \infty} G^{(1),n} \Big|_{\forall (p_0, q_0, r_0) \in D_{(1,0,0)}} = G^{(eff)} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (p_{n+1}, q_{n+1}, r_{n+1}) \Big|_{\forall (p_0, q_0, r_0) \in D_{(0,1,0)}} = \\ = (0, 1, 0), \lim_{n \rightarrow \infty} G^{(2),n} \Big|_{\forall (p_0, q_0, r_0) \in D_{(0,1,0)}} = G^{(eff)} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (p_{n+1}, q_{n+1}, r_{n+1}) \Big|_{\forall (p_0, q_0, r_0) \in D_{(0,0,1)}} = \\ = (0, 0, 1), \lim_{n \rightarrow \infty} G^{(3),n} \Big|_{\forall (p_0, q_0, r_0) \in D_{(0,0,1)}} = G^{(eff)} \end{cases}, \quad (8a)$$

which leads to a convergence of ternary properties of Eq.(7a) to solitary

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n (G_{(km)}^*) \Big|_{\forall (p_0, q_0, r_0) \in D_{(p,q,r)}} = \delta (G_{(km)}^* - G^{(eff)}), \quad (8b)$$

with effective properties corresponding to component (1), (2) or (3) depending on selection of initial probability (p_0, q_0, r_0) at the first iteration step $n = 0$. Thus the probability domain, $\tilde{D}(p, q, r)$, can be divided onto three regions where the renormalization process leads to one of the corresponding stable roots:

$$D(p, q, r) = D_{(1,0,0)}(p, q, r) \cup D_{(0,1,0)}(p, q, r) \cup D_{(0,0,1)}(p, q, r), \quad (8c)$$

$$D(p, q, r) = \tilde{D}(p, q, r) \setminus D(p, q, r). \quad (8d)$$

We notice that at $(p_0 = p_*, q_0 = q_*, r_0 = r_*)$ properties of components are similar. These points can be critical or bicritical and excluded from the probability domain, $\tilde{D}(p, q, r)$, according Eq.(8d).

In our calculations of the properties of the composite we suppose that the following ratio between initial probabilities of components is given:

$$q = \alpha r, \quad (9a)$$

$$r = (1 - p) / (1 + \alpha). \quad (9b)$$

Of note, if $\alpha \rightarrow 0$ then $q \rightarrow 0$ and three-component composite approaches two-component with property $p + r = 1$. On the other hand, if $\alpha \rightarrow \infty$, then $r \rightarrow 0$, which leads in turn to $p + q = 1$. Geometrical interpretation of the condition given in Eq.(9) means that properties are investigated along a line embedded in domain $D(p, q, r)$.

In a special case we consider a situation when arc, covering domains, $D_{(1,0,0)}(p, q, r)$, $D_{(0,1,0)}(p, q, r)$, and $D_{(0,0,1)}(p, q, r)$, represents a trajectory of initial probabilities satisfying Eq.(1). Such a pathway is necessary to describe a phenomenon termed as



$$D(p,q,r) = \tilde{D}(p,q,r) \setminus D(p_*,q_*,r_*). \quad (8d)$$

Заметим, что при $(p_0=p_*, q_0=q_*, r_0=r_*)$ свойства компонентов аналогичны. Эти точки могут быть критическими или бикритическими и исключены из области вероятности, $\tilde{D}(p, q, r)$, согласно уравнению (8d).

В наших расчетах свойств композита мы предполагаем, что задано следующее соотношение между начальными вероятностями компонентов:

$$q = \alpha r, \quad (9a)$$

$$r = (1-p)/(1+\alpha). \quad (9b)$$

Отметим, что если $\alpha \rightarrow 0$, то $q \rightarrow 0$ и трехкомпонентный композит приближается к двухкомпонентному со свойством $p+r=1$. С другой стороны, если $\alpha \rightarrow \infty$, то $r \rightarrow 0$, что в свою очередь приводит к $p+q=1$. Геометрическая интерпретация условия, приведенного в уравнении (9), означает, что свойства исследуются вдоль линии, вписанной в область $D(p, q, r)$.

В частном случае мы рассматриваем ситуацию, когда дуга, охватывающая области, $D_{(1,0,0)}(p, q, r)$, $D_{(0,1,0)}(p, q, r)$ и $D_{(0,0,1)}(p, q, r)$, представляет собой траекторию начальных вероятностей, удовлетворяющую уравнению (1). Такая траектория необходима для описания явления, называемого двойной перколяцией [24-26]. Было установлено, что это явление возникает в результате образования нерегулярного высокопроводящего слоя на границах между проводящим и изолирующим компонентами. Таким образом, система содержит три компонента. Экспериментально было установлено [24], что после достижения связного кластера, состоящего из одного из компонентов, он заменяется другим компонентом. Как следствие, это приводит к резкому изменению эффективных свойств дважды за время изменения доли одного из компонентов (рис.1d).

Траектория дуги может быть смоделирована частью обобщенной кривой суперэллипса [27], приведенной к параметрическому виду:

$$\begin{cases} x = \sqrt{2} r \cos(u)/x(0) \\ y = \sqrt{2} r \sin(u)/x(0) \end{cases} \quad (9c)$$

где $r = \left\| \left| \cos(n_1 u/4) \right| / a \right|^{n_3} + \left| \left| \sin(n_1 u/4) \right| / b \right|^{n_4} \right|^{-\frac{1}{n_2}}$, $-\pi/6 \leq u \leq$

$\pi/6$, и $a = b = 1$. Мы выбрали $n_1 = 6$ для создания суперэллипса, встроенного в шестиугольник. Другие параметры $n_2 = 2$ и $n_3 = n_4 = 12$ использовались для выявления эффекта двойной перколяции

a double percolation [24-26]. This phenomenon has been found to arise from the formation of an irregular, highly conducting layer following the boundaries between the conducting and the insulating components. Effectively, the system thus contains three components. It was experimentally found [24] that after achieving a connected cluster composed from one of the components afterwards it is substituted by another component. As a consequence this leads to a sharp change of effective properties twice in a course of variation of fraction of one of the components (Fig.1d).

The arc trajectory can be modelled by a part of a generalized superellipse curve [27] yielded in a parametric form:

$$\begin{cases} x = \sqrt{2} r \cos(u)/x(0) \\ y = \sqrt{2} r \sin(u)/x(0) \end{cases}, \quad (9c)$$

where $r = \left\| \left| \cos(n_1 u/4) \right| / a \right|^{n_3} + \left| \left| \sin(n_1 u/4) \right| / b \right|^{n_4} \right|^{-\frac{1}{n_2}}$, $-\pi/6 \leq u \leq$

$\pi/6$, and $a = b = 1$. We chose $n_1 = 6$ to create a superellipse embedded in hexagon. Other parameters, $n_2 = 2$ and $n_3 = n_4 = 12$, were used to identify a double percolation effect and create a maximum amplitude and curvature of a cusp of a parametric curve in a selected segment. Increasing n_2 and decreasing n_3 leads to the reduction of curvature and amplitude, and as a consequence, double percolation may disappear. Parametric curve Eq.(9c) was normalized and rotated to be included in a polygon Eq.(1).

Local model of susceptibility function and its effective value

We use the Maxwell model of a local dynamic susceptibility (or response) function, [28]:

$$\hat{\chi}_d(\omega\tau) = \frac{1}{G} \left(\frac{(\omega\tau)^2 + i\omega\tau}{1 + (\omega\tau)^2} \right), \tau > 0, \quad (10)$$

where τ is a relaxation time, and ω is a frequency of an external field, G is a constant of an active component (or local static susceptibility). The characteristic frequency, ω_0 , can be defined as $\omega_0 = 1/\tau$. On the initial level ($n=0$) of iterative procedure the following unification

$$\begin{cases} G^{(1),0} = G_1 \hat{\chi}_d(\omega\tau_1) \\ G^{(2),0} = G_2 \hat{\chi}_d(\omega\tau_2) \\ G^{(3),0} = G_3 \hat{\chi}_d(\omega\tau_3) \end{cases} \quad (11)$$



и создания максимальной амплитуды и кривизны острия параметрической кривой в выбранном сегменте. Увеличение n_2 и уменьшение n_3 приводит к уменьшению кривизны и амплитуды, и, как следствие, двойная перколяция может исчезнуть. Параметрическая кривая уравнению (9с) была нормализована и повернута для включения в многоугольник уравнения (1).

Локальная модель функции восприимчивости и ее эффективное значение

Мы используем модель Максвелла локальной динамической функции восприимчивости (или отклика) [28]:

$$\hat{\chi}_d(\omega\tau) = \frac{1}{G} \left(\frac{(\omega\tau)^2 + i\omega\tau}{1 + (\omega\tau)^2} \right), \tau > 0, \quad (10)$$

где τ – время релаксации; ω – частота внешнего поля; G – константа активной составляющей (или локальной статической восприимчивости). Характеристическая частота, ω_0 , может быть определена как $\omega_0 = 1/\tau$. На начальном уровне ($n=0$) итерационной процедуры следующее объединение

$$\begin{cases} G^{(1),0} = G_1 \hat{\chi}_d(\omega\tau_1) \\ G^{(2),0} = G_2 \hat{\chi}_d(\omega\tau_2) \\ G^{(3),0} = G_3 \hat{\chi}_d(\omega\tau_3) \end{cases} \quad (11)$$

безразмерных функций отклика представляет параметры трех компонентов в обобщенной функции плотности вероятности в уравнениях (2, 7а). В уравнении (11) параметры активной компоненты нормированы на G_1 в дальней частотной области, $\omega \gg \omega_0$. Например, если наложить неравенства $G_1 > G_2 > G_3$ и $\tau_1 > \tau_2 > \tau_3$, то компонента (1) медленно релаксирует с очень большой постоянной активной части, а быстрая релаксация и наименьшая постоянная активной части представляют компоненту (3).

Баланс всех сил в любом месте композита предполагает закон сохранения:

$$\sum_{\substack{k \neq m \\ k \in S \setminus S_r \\ m \in S}} G_{(km)}^* (u_k - u_m) = 0, \quad (12)$$

если u_k – смещение на k -м узле. Распределение локальных обобщенных восприимчивостей, $G_{(km)}^*$, в уравнении (12) подчиняется уравнению (7а) и на каждом шаге n перенормировки должно зависеть от индекса, то есть $G_{(km),n}^*$ в общем случае.

Граничное условие Дирихле в уравнении (12) соответствует $u_m|_{\Gamma_+} = 0$ и $u_m|_{\Gamma_-} = 1$ на левой, Γ_+ , и правой,

of dimensionless response functions represents parameters of three components in a generalized probability density function in Eqs.(2, 7a). In Eq.(11) parameters of the active component were normalized to G_1 in the far frequency region, $\omega \gg \omega_0$. For example, if we impose inequalities $G_1 > G_2 > G_3$ and $\tau_1 > \tau_2 > \tau_3$, component (1) is slowly relaxing with the very large constant of active part, and the fast relaxing and low-est constant of active parts represent component (3).

The balance of all forces at any location within composite assumes a conservation law:

$$\sum_{\substack{k \neq m \\ k \in S \setminus S_r \\ m \in S}} G_{(km)}^* (u_k - u_m) = 0, \quad (12)$$

if u_k is a displacement on k^{th} node. The distribution of local generalized susceptibilities, $G_{(km)}^*$, in Eq.(12) is governed by Eq.(7a) and at each step n of renormalization should depend on the index, i.e. $G_{(km),n}^*$, in a general case.

The Dirichlet boundary condition in Eq.(12) corresponds $u_m|_{\Gamma_+} = 0$ and $u_m|_{\Gamma_-} = 1$ on the left, Γ_+ , and right, Γ_- , sides of the unit cell respectively (Fig.1a). In Eq.(12) we assume lattice constant $a = 1$. Using the Kronecker delta symbol, δ_{km} , it is possible to introduce a matrix of response functions, \hat{G}^* , which the matrix element, \hat{G}_{km}^* , is given as:

$$\hat{G}_{km}^* \Big|_{\substack{m \neq k \\ k \in S \setminus S_r \\ m \in S}} = \left(\delta_{km} \sum_{s \in S} G_{(ks),n}^* - (1 - \delta_{km}) G_{(km),n}^* \right), \quad (13)$$

and to rewrite Eq.(12) as a linear equation:

$$\hat{G}_{km}^* u_m = c_k, \quad (14)$$

where c_k denotes the external force which is zero but on the right side boundary.

After solving Eq.(14) relatively to unknown u_m , we find the equivalent susceptibility of the lattice in Eq.(3) expressed in a form

$$F(\{G_{(km),n}^*\}) = \sum_{\substack{k \neq m \\ m \in S \\ k \in S_r}} G_{(km),n}^* u_m, \quad (15)$$

where nodes k are taken only for the left contacted boundary Γ_+ . From the structure of values in Eqs.(10,11,15) it is clear that the equivalent sus-

ceptibility functions, $F(\{G_{(km),n}^*\})$, are complex-val-

ued with active real and relaxing imaging parts. The statistical averaging of Eq.(15) should be performed according to distribution in Eq.(2) on a whole set E yielding effective susceptibilities,

$$\langle F(\{G_{(km),n}^*\}) \rangle^{(1),n+1}, \langle F(\{G_{(km),n}^*\}) \rangle^{(2),n+1}, \langle F(\{G_{(km),n}^*\}) \rangle^{(3),n+1}, \text{ for}$$



Γ_+ , сторонах элементарной ячейки соответственно (рис.1а). В уравнении (12) мы предполагаем постоянную решетки $a = 1$. Используя символ дельты Кронекера, δ_{km} , можно ввести матрицу функций отклика, \hat{G}^* , в которой элемент матрицы, \hat{G}_{km}^* , задается как:

$$\hat{G}_{km}^* \Big|_{\substack{m \neq k \\ k \in S \setminus S_r \\ m \in S}} = \left(\delta_{km} \sum_{s \in S} G_{(ks),n}^* - (1 - \delta_{km}) G_{(km),n}^* \right), \quad (13)$$

и переписать уравнение (12) в виде линейного уравнения:

$$\hat{G}_{km}^* u_m = c_k, \quad (14)$$

где c_k обозначает внешнюю силу, которая равна нулю, но на правой боковой границе.

После решения уравнения (14) относительно неизвестных u_m находим эквивалентную восприимчивость решетки по уравнению (3), выраженной в виде:

$$F\left(\left\{G_{(km),n}^*\right\}\right) = \sum_{\substack{m \in S \\ k \in S_r}}^{k \neq m} G_{(km),n}^* u_m, \quad (15)$$

где узлы k взяты только для левой контактирующей границы Γ_+ . Из структуры величин в уравнениях (10, 11, 15) видно, что эквивалентные функции восприимчивости, $F\left(\left\{G_{(km),n}^*\right\}\right)$, являются ком-

плексно-значными с активной вещественной и релаксирующей мнимой частями.

Статистическое усреднение уравнения (15) должно быть выполнено в соответствии с распределением в уравнении (2) по всему множеству E , дающему эффективные восприимчивости

$$\left\langle F\left(\left\{G_{(km),n}^*\right\}\right) \right\rangle^{(1),n+1}, \left\langle F\left(\left\{G_{(km),n}^*\right\}\right) \right\rangle^{(2),n+1}, \left\langle F\left(\left\{G_{(km),n}^*\right\}\right) \right\rangle^{(3),n+1},$$

для связанных и несвязанных кластеров. Выполняя итерационную процедуру, мы приближаемся к стабильным эффективным восприимчивостям в соответствии с уравнением (8а), которые анализируются в следующем разделе.

Результаты численного моделирования

Для проведения численного анализа эффективной функции восприимчивости мы, прежде всего, анализируем перенормировочный поток долей компонент во время процедуры перенормировки. Для этого мы построили сетку с координатами узлов (p_0, q_0, r_0) , удовлетворяющих уравнению (1). Затем мы выполняем преобразование в соответствии с уравнениями (5, 6). Это преобразование дает новую сетку с узлами (p_1, q_1, r_1) . Векторное

connected and disconnected clusters. If we carry out the iterative procedure we approach stable effective susceptibilities according to Eq.(8a) which are analyzed in the next section.

Results of numerical simulations

to perform a numerical analysis of the effective susceptibility function we, first of all, analyze a renormalization flux of fractions of components during the renormalization procedure. For this purpose we built a grid with coordinates of nodes (p_0, q_0, r_0) which satisfy Eq.(1). Then we perform a transformation according to Eqs.(5, 6). This transformation provides a new grid with nodes (p_1, q_1, r_1) . The vector field of the renormalization flux can be constructed as $(p_1 - p_0, q_1 - q_0, r_1 - r_0)$ and then assigned to the initial grid. The maximal norm of any vector cannot exceed 1 and minimal norm is bounded by 0. In Fig.1b we demonstrate a triangle described by Eq.(1) seen from the top of its normal vector, $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$. Arrows represent a renormalization flux projected onto the polygon. The flux achieves minimal norm at the corners of the triangle at vertices A, B, and C in Fig.(1b). These are stable points of renormalization because the vector field converges to them from any direction.

Eqs.5, 6 allow the introduction of a red-green-blue color-coding scheme where the color red corresponds to a stable vertex $A=(1, 0, 0)$, green $B=(0, 1, 0)$ and blue $C=(0, 0, 1)$. The mixture of colors is represented by a vector $(P(p_0, q_0, r_0), Q(p_0, q_0, r_0), R(p_0, q_0, r_0))$ from Eq.(5), which is not aligned to any of the Cartesian axis in a general case. This color-coded background is demonstrated in Fig.1b as well.

At certain points of the polygon in Fig.1b the vector field diverges to two or three points of a set $\{A, B, C\}$. The minimal norm of the flux can be found in the vicinity of points $L_5=(0.5, 0.5, 0.0)$, $L_4=(0.5, 0.0, 0.5)$, $L_2=(0.0,0.5,0.5)$ on the edges of the triangle. These are unstable points of renormalization because the vector field diverges there. Between them we can discriminate critical points, L_4 and L_5 , characterized by a possibility of divergence in the direction of one of the two components. Bicritical point, L_2 , is characterized by a possibility of divergence in the direction of one of the three components. Interestingly, we can find two lines, L_2L_4 and L_2L_5 , where unstable critical points are located. These lines partition probability domain, $D(p, q, r)$, as it is pointed in Eq.(8c).

Renormalization along edges AB, BC, AC corresponds to a two-component composite. Functions $P(p, q, r)$, $Q(p, q, r)$, and $R(p, q, r)$ are plotted in

поле потока перенормировки может быть построено как $(p_1 - p_0, q_1 - q_0, r_1 - r_0)$, а затем присвоено исходной сетке. Максимальная норма любого вектора не может превышать 1, а минимальная норма ограничена 0. На рис.1b показан треугольник, описываемый уравнением (1), рассматриваемый с вершины его нормального вектора, $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$. Стрелки представляют поток перенормировки, спроецированный на многоугольник. Поток достигает минимальной нормы в углах треугольника в вершинах А, В и С на рис.1b. Это устойчивые точки перенормировки, поскольку векторное поле сходится к ним с любого направления.

Уравнения 5, 6 позволяют ввести красно-зелено-синюю схему цветового кодирования, где красный цвет соответствует устойчивой вершине $A=(1, 0, 0)$, зеленый $B=(0, 1, 0)$ и синий $C=(0, 0, 1)$. Смесь цветов представлена вектором $(P(p_0, q_0, r_0), Q(p_0, q_0, r_0), R(p_0, q_0, r_0))$ из уравнения (5), который в общем случае не выровнен ни по одной из декартовых осей. Этот цветовой фон продемонстрирован и на рис.1b.

В определенных точках многоугольника на рис.1b векторное поле расходится в две или три точки множества $\{A, B, C\}$. Минимальная норма потока может быть найдена в окрестности точек $L_5=(0.5, 0.5, 0.0)$, $L_4=(0.5, 0.0, 0.5)$, $L_2=(0.0, 0.5, 0.5)$ на ребрах треугольника. Это неустойчивые точки перенормировки, поскольку векторное поле там расходится. Между ними можно выделить критические точки, L_4 и L_5 , характеризующиеся возможностью расхождения в направлении одной из двух компонент. Бикритическая точка, L_2 , характеризуется возможностью расхождения в направлении одной из трех компонент. Интересно, что мы можем найти две линии, L_2L_4 и L_2L_5 , на которых расположены неустойчивые критические точки. Эти линии перенормировки вдоль ребер АВ, ВС, АС соответствуют двухкомпонентному композиту. Функции $P(p, q, r)$, $Q(p, q, r)$ и $R(p, q, r)$ построены на рис.1c в соответствии с уравнениями (5), если r , p или q заданы 0 соответственно. Зигзагообразная траектория представляет собой эволюцию уравнения (6). Число итераций для построения иерархической решетки во время процедуры перенормировки определяется ограничением $|p_n - p_{n+1}| \leq 1^{-3}$ и представлено на том же рис.1c.

Мы варьируем параметр p , сохраняя неизменным соотношение α между остальными компонентами (уравнения (9a,b)). Такая процедура, например, соответствует линиям АВ, AL_1 , AL_2 , AL_3 , АС, изображенным на рис.1b как исходящие из вершины А. Тестовые значения параметра α приведены в табл.1. Мы также используем

Fig.1c according to Eqs.(5) if r , p or q are set to 0 respectively. A zigzag pathway represents an evolution of p_n during the execution of Eq.(6). The number of iterations for building a hierarchical lattice during the renormalization procedure is defined by the constraint $|p_n - p_{n+1}| \leq 1^{-3}$ and presented at the same Fig.1c.

We vary parameter p keeping the ratio, α , between the other components unchanged (Eq. (9a,b)). Such a procedure, for example, corresponds to lines АВ, AL_1 , AL_2 , AL_3 , АС depicted in Fig.1b as outgoing from vertex А. Test values of parameter α are shown in Table 1. We also use arc (Eq.9c) as a pathway of the variation parameter p represented as a part of a superellipse to model a double percolation effect.

For the description of the external load the frequency window, $\omega = [10^{-3}; 10^2]$ rad/sec, was selected in our calculation. The real (i.e. active) and imaginary (i.e. relaxing) parts of the effective susceptibility can be demonstrated as surfaces in logarithmic scale as functions of frequency (in logarithmic scale) and fraction p . Here logarithmic scale assists to compare values with a large diversity. To evaluate sensitivities of effective values to input parameters we overlay a contour curve onto the surfaces with level -4 in all cases. We also projected this curve onto a plane ($\log_{10}(\omega\tau)$, p). The surfaces of real and imaginary parts of effective susceptibility are color-coded, where the colors red and blue correspond respectively to the minimum and maximum distance of the point on the surface relative to the 0 level. The color-coded scheme of the surfaces is projected onto a plane to facilitate a quantitative evaluation of parameters.

In Fig.2 we demonstrate effective susceptibility along lines АВ and АС from Fig.1b corresponding to a two-component composite with parameters taken from Table 1. Formally the variation of p along these lines is defined by $\alpha \rightarrow 0$ and $\alpha \rightarrow \infty$ (in our numerical calculations $\alpha = 1000$). In Fig.2a and Fig.2c we can see that in the high frequency limit, $\omega\tau \rightarrow \infty$, the real part of the dynamic effective susceptibility function approach its static values for components (3) or (2) from Table 1 if $p \rightarrow 0$. On the other hand the active part of effective susceptibility is frequency independent if $p \rightarrow 1$ taking the value corresponding to the component (1) from Table 1. In a low frequency limit, $\omega\tau \rightarrow 0$, the real part of effective susceptibility demonstrates a linear dependence which transits into plateau near characteristic frequencies $\omega_2 \rightarrow 1/\tau_2$ (Fig.2c) and $\omega_3 \rightarrow 1/\tau_3$ (Fig.2a) at $p < p^*$. The transition corresponds to the maximum of the imaginary part of the effective susceptibility at the same characteristic frequencies



дугу (уравнения 9с) как путь вариационного параметра ρ , представленного в виде части суперэллипса, для моделирования эффекта двойной перколяции.

Для описания внешней нагрузки в нашем расчете было выбрано частотное окно $\omega = [10^{-3}; 10^2]$, рад/сек. Действительная (т.е. активная) и мнимая (т.е. релаксирующая) части эффективной восприимчивости могут быть представлены в виде поверхностей в логарифмическом масштабе как функции частоты (в логарифмическом масштабе) и доли ρ . Здесь логарифмическая шкала помогает сравнивать величины с большим разбросом. Для оценки чувствительности эффективных значений к входным параметрам мы наложили контурную кривую на поверхности с уровнем -4 во всех случаях. Мы также спроецировали эту кривую на плоскость $(\log_{10}(\omega\tau), \rho)$. Поверхности действительной и мнимой частей эффективной восприимчивости имеют цветовую кодировку, где красный и синий цвета соответствуют соответственно минимальному и максимальному расстоянию точки на поверхности относительно уровня 0 . Цветовая схема поверхностей проецируется на плоскость для облегчения количественной оценки параметров.

На рис.2 мы демонстрируем эффективную восприимчивость вдоль линий АВ и АС с рис.1б,

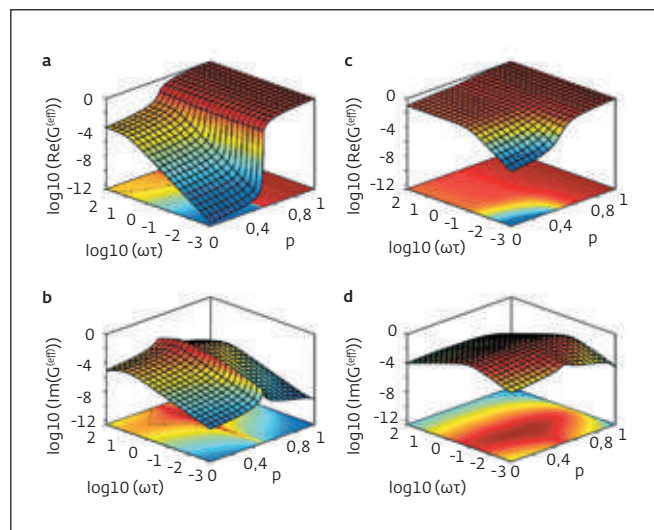


Рис.2. Активная (а, с) и релаксирующая (b, d) части эффективных восприимчивостей для случаев, соответствующих двухкомпонентной системе ($\alpha = 0$ (a,b) вдоль пути АС (рис.1б) и $\alpha = 1000$ (c,d) вдоль пути АВ (рис.1б)). Параметры численного расчета приведены в табл.1

Fig.2. Active (a, c) and relaxing (b, d) parts of effective susceptibilities for the cases corresponding to two-component system ($a = 0$ (a,b) along pathway AC (Fig.1b) and $a = 1000$ (c,d) along pathway AB (Fig.1b)). Parameters of numerical calculation can be found in the Table 1

Таблица 1. Входящие параметры численных расчетов
Table 1. Input parameters for numerical simulations

α^1	G_1	τ_1, c_s	G_2	τ_2, c_s	G_3	τ_3, c_s	Рисунок Figure N
0	1	10^{12}	10^{-1}	10	10^{-4}	10^{-1}	Fig.2a,b
1000							Fig.2c,d
0.5	1	10^{12}	10^{-1}	10	10^{-4}	10^{-1}	Fig.3a,b
2.0							Fig.3c,d
0.5	1	10^{12}	10^{-4}	10	10^{-4}	10^{-1}	Fig.4a,b
1.0							Fig.4c,d
2.0							Fig.4e,f
arc	10^{-1}	10	1	10	10^{-4}	10	Fig.5a,b
	1		10^{-1}		10^{-4}		Fig.5c,d
	1		10^{-4}		10^{-4}		Fig.5e,f

соответствующих двухкомпонентному композиту с параметрами, взятыми из табл.1. Формально изменение p вдоль этих линий определяется через $\alpha \rightarrow 0$ и $\alpha \rightarrow \infty$ (в наших численных расчетах $\alpha = 1000$). На рис.2а и рис.2с видно, что в высокочастотном пределе, $\omega t \rightarrow \infty$, реальная часть динамической функции эффективной восприимчивости приближается к своим статическим значениям для компонентов (3) или (2) из табл.1, если $p \rightarrow 0$. С другой стороны, активная часть эффективной восприимчивости не зависит от частоты, если при $p \rightarrow 1$ принять значение, соответствующее компоненту (1) из табл.1. В низкочастотном пределе, $\omega t \rightarrow 0$, реальная часть эффективной восприимчивости демонстрирует линейную зависимость, которая переходит в плато вблизи характерных частот $\omega_2 \rightarrow 1/\tau_2$ (рис.2с) и $\omega_3 \rightarrow 1/\tau_3$ (рис.2а) при $p < p_*$. Переход соответствует максимуму мнимой части эффективной восприимчивости на тех же характерных частотах (рис.2b,d).

Характерная частота смещается к нижнему пределу, если мы увеличиваем долю $p \rightarrow p_*$. В точке $p = p_*$ наблюдается скачок действительной и максимум мнимой частей эффективной восприимчивости. Кроме того, мнимая часть эффективной восприимчивости достигает своего глобального максимума на характеристической частоте при $p = p_*$.

На рис.3 представлены результаты расчета эффективной восприимчивости для трехкомпонентной системы (параметры приведены в табл.1). Траектория проходит по линиям AL_1 и AL_3 (рис.1b). Из-за большой разницы в начальных статических восприимчивостях компонентов (2) и (3), т.е. $G^{(2),0} \gg G^{(3),0}$, поведение эффективной восприимчивости очень похоже на поведение двухкомпонентной системы, описанной ранее.

В отличие от предыдущей ситуации, если начальные статические восприимчивости компонентов (2) и (3) приближаются друг к другу, мы можем наблюдать эффекты, характерные для трехкомпонентной системы. Для моделирования сохраним то же соотношение начальных времен релаксации, но предположим $G^{(1),0} > G^{(2),0} = G^{(3),0}$ (см. табл. 1) и проследим за линиями AL_1 , AL_2 и AL_3 (рис. 1b).

В этом случае эффективная активная часть не очень чувствительна к α , хотя мы наблюдаем небольшое складывание плато вблизи ω_2 и ω_3 (рис.4 а,с,е). Это можно оценить по изоконтурной кривой, спроецированной на плоскость $(\log_{10}(\omega t), p)$. Для случая эффективной активной части мы видим два сдвига и три плато, если рассматривать проекцию изоконтурной кривой. Для лучшей оценки эффекта на рис.4h мы построили график эффективной активной части $p \rightarrow 0$ как в логарифмическом масштабе (серая цветная кривая), так и без нее (черная цветная кривая). Здесь мы наблюдаем два перехода

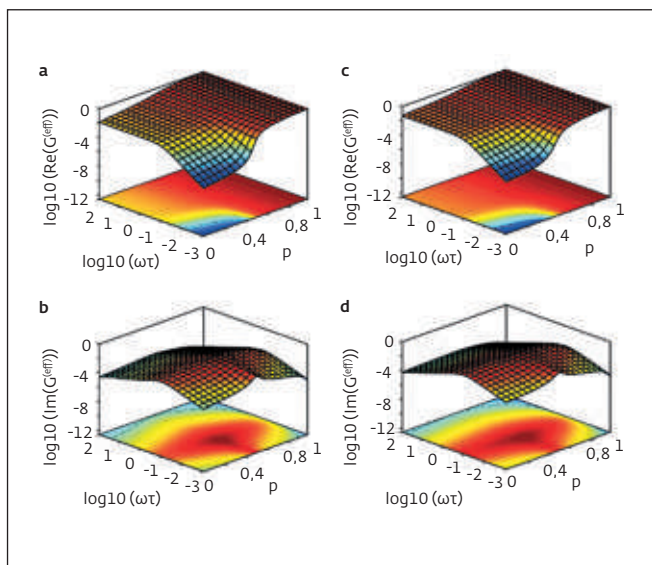


Рис.3. Активная (а,с) и релаксационная (b,d) части эффективных восприимчивостей для случая трехкомпонентной системы ($a = 0,5$ (а,b) вдоль пути AL_3 (рис.1b) и $a = 2$ (с,d) вдоль пути AL_1 (рис.1b)). Начальные статические коэффициенты локальных восприимчивостей и времена релаксации различны для каждого из компонентов. Параметры численных расчетов приведены в табл.1

Fig.3. Active (a,c) and relaxing (b,d) parts of effective susceptibilities for the cases of three-component system ($a = 0,5$ (a,b) along pathway AL_3 (Fig.1b) and $a = 2$ (c,d) along pathway AL_1 (Fig.1b)). Initial static coefficients of local susceptibilities and relaxation times are different for each of the components. Parameters of numerical calculations can be found in the Table 1

(Figs.2b,d). The characteristic frequency is shifted to the lower limit if we increase the fraction $p \rightarrow p_*$. At the point $p = p_*$ we observe a jump of the real and maximum of the imaginary parts of the effective susceptibility. Besides, the imaginary part of the effective susceptibility achieves its global maximum at the characteristic frequency at $p = p_*$.

In Fig.3 we present results of the calculation of effective susceptibility for a three-component system (parameters are given in Table 1). The trajectory follows lines AL_1 and AL_3 (Fig.1b). Due to the large difference in initial static susceptibilities of components (2) and (3), i.e. $G^{(2),0} \gg G^{(3),0}$, the behaviour of the effective susceptibility is very similar to the two-component system described earlier. Contrarily to the previous situation, if initial static susceptibilities of components (2) and (3) approach each other, we can observe effects which are specific to the three-component system. For the simulation reason we keep the same ratio of initial relaxation times, but assume



вблизи характерных частот, ω_2 и ω_3 (тонкие штриховые линии).

В то же время эффективная релаксационная компонента демонстрирует высокую чувствительность к параметру α . Мы наблюдаем два различных максимума эффективной восприимчивости на линии перколяции $p = p^*$ (рис.4b-f). Если $\alpha = 0,5$, то глобальный максимум смещен к высоким частотам (рис.4b). В случае $\alpha = 1$ максимумы на высоких и низких частотах почти одинаковы (рис.4d). Для $\alpha = 2$ максимум смещен в сторону низких частот (рис.4f).

Мы также можем продемонстрировать явление двойной перколяции, описанное в работах [24-26]. Для этого траектория начальных концентраций соответствует дуге (рис.1b и уравнение (9с)). Следование этой траектории означает достижение перколяции компоненты (2) вблизи края ВС, затем одновременное уменьшение долей компонентов (2) и (3) и увеличение доли компонента (1) приближает нас к стабильной точке А на краю АС. Такое преобразование предполагает, что перколяционный кластер, образованный из компоненты (2), впоследствии заменяется перколяционным кластером, образованным из компоненты (1). Результат продемонстрирован на рис.5 для различных начальных значений активных компонент, собранных в табл.1. Для простоты предполагается, что скорость релаксации одинакова для всех соединений.

На рис.5 можно заметить, что эффективная восприимчивость существенно изменяется в два раза вблизи $p = p_I \approx 0,1$ и $p = p_{II} \approx 0,8$. В зависимости от начальных активных значений мы моделируем три возможные ситуации изменения эффективной восприимчивости как функции концентрации p , а именно, эффективная восприимчивость может быть вогнутой (рис.5а), возрастающей (рис.5с) и выпуклой (рис.5е) функцией вдоль параметра p . Для оценки степени эффекта мы построили график реальной части эффективной восприимчивости с пределом $\omega\tau \rightarrow \infty$ (рис.5h) в логарифмическом масштабе и без него.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе мы исследовали свойства восприимчивости случайной трехкомпонентной системы с помощью недавно разработанного подхода иерархического усреднения по масштабу. Показано, что в случае большого расхождения статических локальных восприимчивостей динамические эффективные свойства аналогичны двухкомпонентной системе. Если статические восприимчивости компонентов (2) и (3) приближаются друг к другу, сохраняя различие релаксационных частей, то проявляются особенности трехкомпонентной системы. В этом случае эффективная активная часть имеет

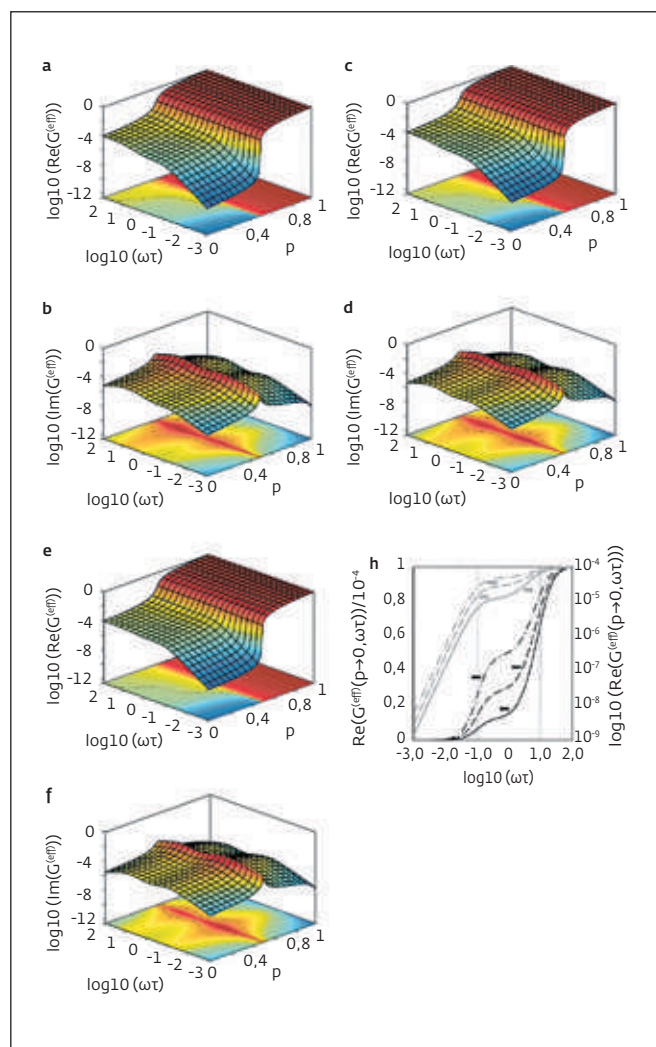


Рис.4. Активная (a,c,e) и релаксирующая (b,d,f) части эффективных восприимчивостей для случаев трехкомпонентной системы ($a = 0,5$ (a,b) вдоль пути AL_3 (рис.1b), $a = 1,0$ (c,d) вдоль пути AL_2 (рис.1b) и $a = 2$ (e,f) вдоль пути AL_1 (рис.1b)). Начальные статические коэффициенты локальных восприимчивостей одинаковы для компонентов (2) и (3). Параметры численных расчетов приведены в табл.1. Активные значения эффективных восприимчивостей для $p \rightarrow 0$ (h) показаны для $a = 0,5$ (сплошная линия), $a = 1,0$ (штриховая линия) и $a = 2$ (точка и штриховая линия) в логарифмическом масштабе (серые кривые) и без (черные кривые)

Fig.4. Active (a,c,e) and relaxing (b,d,f) parts of effective susceptibilities for the cases of three-component system ($a = 0,5$ (a,b) along pathway AL_3 (Fig.1b), $a = 1,0$ (c,d) along pathway AL_2 (Fig.1b) and $a = 2$ (e,f) along pathway AL_1 (Fig.1b)). Initial static coefficients of local susceptibilities are the same for components (2) and (3). Parameters of numerical calculations can be found in the Table 1. Active values of effective susceptibilities for $p \rightarrow 0$ (h) are shown for $a = 0,5$ (solid line), $a = 1,0$ (dash line), and $a = 2$ (dot and dash line) in logarithmic scale (gray curves) and without (black curves)

два плато, а релаксирующая часть демонстрирует два максимума. Амплитуды максимумов для релаксирующей части зависят от доминирующего компонента.

Также впервые исследован случай двойной перколяции, показавший, что динамические эффективные свойства восприимчивости меняются два раза. В первом случае изменение связано с созданием перколяционного кластера, построенного из компоненты (2), второе изменение связано с выдавливанием компонент (2) и (3) компонентой (1), которая строит вторичный перколяционный кластер.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Вращения в трех измерениях могут быть эквивалентно описаны одним из SO (3) или SU (2) представлений [29]. В первом представлении используются матрицы вращения 3×3 и векторы 3×1 . Матрицы ортонормальны и их матричные элементы вещественны. В этом представлении SU (2) общая матрица вращения U может быть записана в виде:

$$U = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta^* \\ \beta & \alpha^* \end{pmatrix}, \quad (A1)$$

которая действует на функцию $z = f(x, y)$ в уравнении (9c) и задается как

$$V = \begin{pmatrix} z & x-iy \\ x+iy & -z \end{pmatrix}. \quad (A2)$$

Элементы матрицы U – комплексные числа, известные как параметры Кейли-Клейна, а звездочка обозначает комплексное сопряжение. Матрица U унитарна и эрмитова. Общее вращение может быть записано:

$$UVU^H = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta^* \\ \beta & \alpha^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & x-iy \\ x+iy & -z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^* & \beta^* \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad (A3)$$

где символ H – эрмитово сопряжение. В терминах углов Эйлера общая матрица U вращения может быть разложена:

$$U = U_\phi U_\theta U_\psi \quad (A4)$$

и

$$U_\theta = \pm \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & i\sin(\theta/2) \\ i\sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{pmatrix}, \quad (A5)$$

$$U_\phi = \pm \begin{pmatrix} e^{i\frac{\phi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\phi}{2}} \end{pmatrix}, \quad U_\psi = \pm \begin{pmatrix} e^{i\frac{\psi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\psi}{2}} \end{pmatrix}.$$

Математическое упрощение, обеспечиваемое представлением SU (2), является следствием

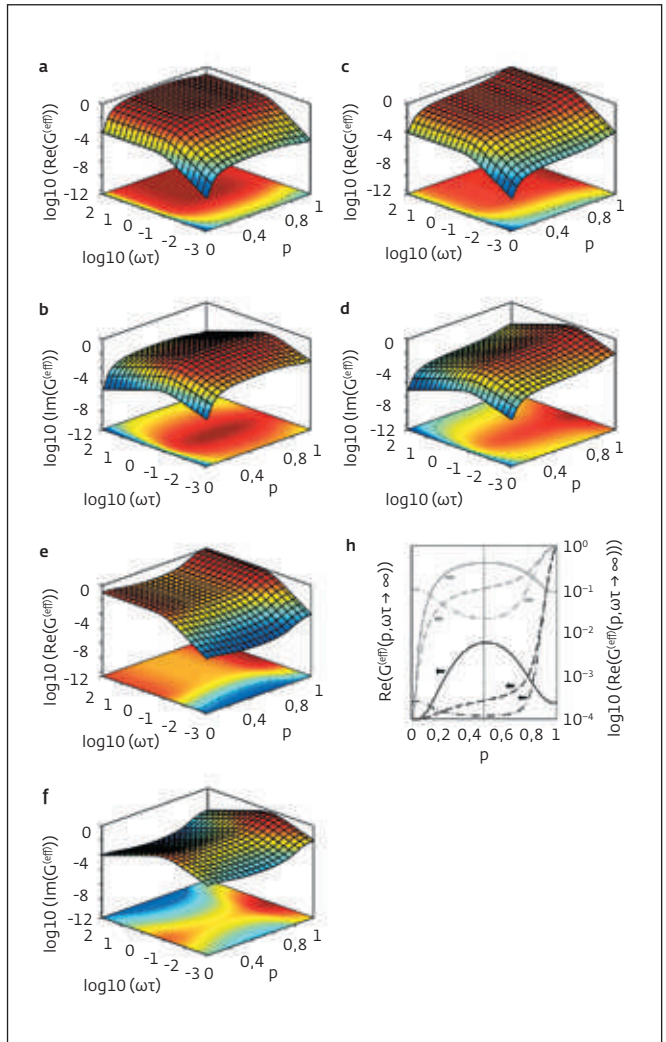


Рис. 5. Активная (a,c,e) и релаксирующая (b,d,f) части эффективных восприимчивостей для случая трехкомпонентной системы с различными начальными активными компонентами. Траектория начальных концентраций p имеет вид дуги (уравнение 9c, рис.1b). Неравенства активных компонентов заданы как $G_2 > G_1 > G_3$ (a,b), $G_1 > G_2 > G_3$ (c,d), $G_1 > G_3 > G_2$ (e,f). Параметры численных расчетов приведены в табл.1. h. Активные значения эффективной восприимчивости в пределе $\omega t \rightarrow \infty$ для рис.5a (сплошная линия), рис.5c (штриховая линия) и рис.5e (точка и штриховая линия) в логарифмическом масштабе (серые кривые) и без (черные кривые)

Fig.5. Active (a,c,e) and relaxing (b,d,f) parts of effective susceptibilities for the case of three-component system with different initial active components. The trajectory of initial concentrations p is yielded as arc (Eq.9c, Fig.1b). Inequalities of active components are given as $G_2 > G_1 > G_3$ (a,b), $G_1 > G_2 > G_3$ (c,d), $G_1 > G_3 > G_2$ (e,f). Parameters of numerical calculations can be found in the Table 1. h. Active values of effective susceptibility in a limit $\omega t \rightarrow \infty$ for Fig.5a (solid line), Fig.5c (dash line), and Fig.5e (dot and dash line) in logarithmic scale (grey curves) and without (black curves)



меньшего числа ограничений. Эта ситуация аналогична решению системы линейных уравнений, где почти всегда проще решить меньшее число уравнений с меньшим числом ограничений. Для нашего приложения мы объединили вращения и трансляционные преобразования:

$$V' = U_{\theta_2} U_{\varphi} U_{\psi} (U_{\theta_1} V U_{\theta_1}^H + V_1) U_{\psi}^H U_{\varphi}^H U_{\theta_2}^H + V_2, \quad (A6)$$

где $\psi = 0$, $\theta_1 = -90^\circ$, $\theta_2 = -45^\circ$, $\varphi = 125,26$ и

$$V_1 = \sqrt{2} \sin(60^\circ) \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1+i \\ 1-i & 0 \end{pmatrix}. \quad (A7)$$

Кривая, описанная в уравнении (9с), может быть представлена в соответствии с уравнением (A6) для вложения в область вероятности.

ИНФОРМАЦИЯ О РЕЦЕНЗИРОВАНИИ

Редакция благодарит анонимного рецензента (рецензентов) за их вклад в рецензирование этой работы, а также за размещение статей на сайте журнала и передачу их в электронном виде в НЭБ eLIBRARY.RU.

ЛИТЕРАТУРА / REFERENCES

1. **Broadbent S.R., Hammersley J.M.** Proc. Camb. Phil. Soc. 53, 629 (1957).
2. **Stauffer D.** Scaling theory of percolation clusters, Physics Reports 54 (1), 1 (1979).
3. **Shklovskii B.I., Efros A.L.** Electronic Properties of Doped Semiconductors, Springer Series in Solid State Sciences, 45 (Springer-Verlag, Berlin, 1984).
4. **Kirkpatrick S.** Percolation and conduction, Rev. Mod. Phys. 45, 574 (1973).
5. **Herrmann H.J.** Geometrical cluster growth models and kinetic gelation, Physics Reports 136 (3), 153 (1980).
6. **Thompson A.H., Katz A.J., Krohn C.E.** The microgeometry and transport properties of sedimentary rock, Advances in Physics 36 (5), 625 (1987).
7. **Du F., Scogna R.C., Zhou W., Brand S., Fischer J.E., Karen I.** Winey, Nanotube Networks in Polymer Nanocomposites: Rheology and Electrical Conductivity, Macromolecules 37, 9048 (2004).
8. **Posnansky O.P.** On the influence of microscopic architecture elements to the global viscoelastic properties of soft biological tissue, Physica D: Nonlinear Phenomena 289, 1 (2014).
9. **Posnansky O., Guo J., Hirsch S., Papazoglou S., Braun J., Sack I.** Fractal network dimension and Viscoelastic powerlaw behav-

$G^{(1),0} > G^{(2),0} = G^{(3),0}$ (see Table 1) and follow lines AL_1 , AL_2 and AL_3 (Fig.1b).

In this case the effective active part is not very sensitive to α although we observe a slight folding of plateau near ω_2 and ω_3 (Fig.4a,c,e). This can be evaluated by the iso-contour curve projected onto plane $(\log 10(\omega\tau), p)$. For the case of the effective active part we see two shifts and three plateaus if we consider a projection iso-contour curve. For the better estimation of the effect in Fig.4h we plotted the effective active part for $p \rightarrow 0$ as in logarithmic scale (grey colored curve) as without (black colored curve). There we observe two transitions near characteristic frequencies, ω_2 and ω_3 (thin dash lines).

At the same time, the effective relaxation component exhibits high sensitivity to the parameter α . We observe two distinct maximums of effective susceptibility at percolation line $p = p_*$ (Fig.4b-f). If $\alpha = 0,5$, the global maximum is shifted to the high frequencies (Fig.4b). In case of $\alpha = 1$ maximums at high and low frequencies are nearly the same (Fig.4d). For $\alpha = 2$, maximum is shifted to the low frequencies (Fig.4f).

We can also demonstrate a double percolation phenomenon described in Refs.[24–26]. For this purpose the trajectory of initial concentrations p corresponds to arc (Fig.1b and Eq.(9c)). Following this trajectory means achieving a percolation of component (2) near the edge BC, then simultaneously reducing of the fractions of the components (2) and (3), and increasing the fraction of the component (1) we approach the stable point A on the edge AC. Such a transformation assumes that the percolation cluster generated from component (2), afterwards is substituted by the percolating cluster composed from component (1). The result is demonstrated in Fig.5 for different initial values of active components collected in Table 1. For simplicity it is assumed that the relaxation rate is the same for all compounds.

What can be noticed in Fig.5 is that the effective susceptibility significantly changes twice near $p = p_I \approx 0,1$ and $p = p_{II} \approx 0,8$. Depending on the initial active values we model three possible situations of the variation of effective susceptibility as a function of the concentration p , namely, effective susceptibility can be concave (Fig.5a), increasing (Fig.5c) and convex (Fig.5e) function along the parameter p . To estimate the extent of the effect we plotted the real part of effective susceptibility with a limit $\omega\tau \rightarrow \infty$ (Fig.5h) in logarithmic scale and without.

CONCLUSIONS

In this work we investigated susceptibility properties of a random three-component system using newly developed hierarchical scale averaging approach. We have shown that in the case of a large discrepancy of the

- ior: I. A modeling approach based on a coarse-graining procedure combined with shear oscillatory rheometry, *Phys. Med. Biol.* 57 (12), 4023 (2012).
10. **Zallen R.** Polychromatic percolation: Coexistence of percolating species in highly connected lattices, *Physical Review B* 16, 1426 (1977).
 11. **Kogut P.M., Straley J.P.** The bicritical macroscopic conductivity exponent in dimensionalities two, three and infinity, *J. Phys. C: Solid State Phys.* 12, 1 (1979).
 12. **Halley J.W., Holcomb W.K.** Conductivity of a Three-Component "Reactive" Percolation Model, *Physical Review Letters* 40 (25), 1670 (1978).
 13. **Halley J.W., Holcomb W.K., Goetz K.** Conduction in multicomponent percolation, *Physical Review B* 21, 4840 (1980).
 14. **Ioselevich A.S.** Multicomponent Percolation Criterion and its Application to Hopping in Disordered Conductors, *Physical Review Letters* 74, 1411 (1995).
 15. **Matveev K.A., Glazman L.I., Clarke Penny, Ephron D., Beasley M.R.** Theory of hopping magnetoresistance induced by Zeeman splitting, *Physical Review B* 52, 5289 (1995).
 16. **Jensen P., Melinon P., Treilleux M., Hu J.X., Dumas J., Hoareau A., Cabaud B.** Direct observation of the infinite percolation cluster in thin films: Evidence for a double percolation process, *Physical Review B* 47 (9), 5008 (1993).
 17. **Liu X., Panguluri R.P., Huang Z., Nadgorny B.** Double Percolation Transition in Superconductor-Ferromagnet Nanocomposites, *Physical Review Letters* 104, 035701 (2010).
 18. **Ioselevich A.S., Kornyshev A.A.** Approximate symmetry laws for percolation in complex systems: Percolation in polydisperse composites, *Physical Review E* 65, 021301 (2002).
 19. **Giona M., Adrover A.** Multicomponent percolation: Probabilistic properties and application to nonisothermal reactions in granular materials, *Physical Review E* 49, 5287 (1994).
 20. **Bradley R.M., Debierre J., Strenski P.N.** Anomalous Scaling Behavior in Percolation with Three Colors, *Physical Review Letters* 68, 2332 (1992).
 21. **Stanley H.E.** *Introductions to Phase Transitions and Critical Phenomena*, Oxford University Press, 1971.
 22. **Reynolds P.J., Klein W., Stanley H.E.** A Real-Space Renormalization Group for Site and Bond Percolation, *Journal of Physics C-Solid State Physics* 10 (8), L167 (1977).
 23. **Reynolds P.J., Klein W., Stanley H.E.** Large-cell Monte Carlo renormalization group for percolation, *Physical Review B* 21, 1223 (1980).

static local susceptibilities dynamic effective properties are similar to a two-component system. If static susceptibilities of the components (2) and (3) approach each other keeping relaxation parts different, then peculiarities of the three-component system become apparent. In this case the effective active part possesses two plateaus and the relaxing part demonstrates two maximums. Amplitudes of maximums for the relaxing part depend on the dominating component.

Also for the first time we investigated a case of double percolation showing that the dynamic effective properties of susceptibility change two times. In the first case change is associated with creation of the percolation cluster built from the component (2), the second change is linked to the extrusion of the component (2) and (3) by the component (1) which builds a secondary percolation cluster.

APPENDIX A

Rotations in three dimensions can be described equivalently by either the SO (3) or SU (2) representations [29]. The first representation uses 3×3 rotation matrices and 3×1 vectors. The matrices are orthonormal and their matrix elements are real. In the SU (2) representation, a general rotation matrix U can be written:

$$U = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta^* \\ \beta & \alpha^* \end{pmatrix} \quad (A1)$$

which acts on a function $z = f(x, y)$ in Eq.(9c) yielded as

$$V = \begin{pmatrix} z & x-iy \\ x+iy & -z \end{pmatrix} \quad (A2)$$

Elements of matrix U are complex numbers known as the Cayley-Klein parameters and the asterisk represents complex conjugation. The matrix U is unitary and Hermitian. The general rotation can be written:

$$UVU^H = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta^* \\ \beta & \alpha^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & x-iy \\ x+iy & -z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^* & \beta^* \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \quad (A3)$$

where symbol H is a Hermitian conjugate. In terms of Euler angles the general rotation matrix U can be decomposed:

$$U = U_\phi U_\theta U_\psi \quad (A4)$$

and

$$U_\theta = \pm \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & i\sin(\theta/2) \\ i\sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{pmatrix},$$

$$U_\phi = \pm \begin{pmatrix} e^{i\phi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi/2} \end{pmatrix}, \quad U_\psi = \pm \begin{pmatrix} e^{i\psi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\psi/2} \end{pmatrix}. \quad (A5)$$



24. Liang C.C. *Electrochem J. Soc.* 120, 1289 (1973).
25. Bunde A., Dietrich W. Percolation in Composites, *Journal of Electroceramics* 5 (2), 81 (2000).
26. Indris S., Heitjans P., Roman H.E., Bunde A. Nanocrystalline versus Microcrystalline Li₂O:B₂O₃ Composites: Anomalous Ionic Conductivities and Percolation Theory, *Physical Review Letters* 84, 2889 (2000).
27. Gielis J. A generic geometric transformation that unifies a wide range of natural and abstract shapes, *American Journal of Botany* 90 (3), 333 (2003).
28. Posnansky O. Viscoelastic Properties of a Hierarchical Model of Soft Biological Tissue: Two-Dimensional and Three-Dimensional Cases, *Journal of Statistical Physics* 164 (5), 1043 (2016).
29. Arfken G.B., Weber H.J. *Mathematical Methods for Physicists* (sixth edition), Elsevier Academic Press, 2005.
30. Konishi Y., Cakmak M. Nanoparticle induced network self-assembly in polymer-carbon black composites, *Polymer*, 47, 5371 (2006).

Декларация о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликтов интересов или личных отношений, которые могли бы повлиять на работу, представленную в данной статье.

The mathematical simplification afforded by the SU(2) representation is a consequence of the fewer number of constraints. This situation is analogous to solving a system of linear equations, where it is nearly always easier to solve fewer equations with fewer constraints. For our application we combined rotations and translations

$$V' = U_{\theta_2} U_{\phi} U_{\psi} (U_{\theta_1} V U_{\theta_1}^H + V_1) U_{\psi}^H U_{\phi}^H U_{\theta_2}^H + V_2, \quad (A6)$$

where $\psi = 0$, $\Theta_1 = -90^\circ$, $\Theta_2 = -45^\circ$, $\varphi = 125,26$ and

$$V_1 = \sqrt{2} \sin(60^\circ) \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1+i \\ 1-i & 0 \end{pmatrix}. \quad (A7)$$

The curve described in Eq.(9c) can be transferred according Eq.(A6) to be embedded in a probability domain.

PEER REVIEW INFO

Editorial board thanks the anonymous reviewer(s) for their contribution to the peer review of this work. It is also grateful for their consent to publish papers on the journal's website and SEL eLibrary eLIBRARY.RU.

Declaration of Competing Interest. The authors declare that they have no known competing financial interests or personal relationships that could have appeared to influence the work reported in this paper.



ИЗДАТЕЛЬСТВО «ТЕХНОСФЕРА» ПРЕДСТАВЛЯЕТ КНИГУ:



Цена 2600 руб.

Гибсон Я., Розен Д., Стакер Б.

ТЕХНОЛОГИИ АДДИТИВНОГО ПРОИЗВОДСТВА Трехмерная печать, быстрое прототипирование и прямое цифровое производство

М.: ТЕХНОСФЕРА, 2020. – 648 с. ISBN 978-5-94836-447-6

Книга посвящена новейшим технологиям, которые дают возможность на основе данных о виртуальных моделях твердых тел изготавливать физические модели в результате быстрых и легких производственных процессов. Авторы книги – признанные специалисты в области аддитивных технологий, имеющие многолетний опыт работы и исследований. Первое издание задумывалось как базовый учебник, объединивший все литературные источники, посвященные целям и задачам аддитивного производства (АП). Второе издание существенно переработано и дополнено, новая информация включена в дополнительные

разделы и главы. Разработчики АП и представители промышленности найдут полезные сведения в этой книге, поскольку она поможет понять состояние дел в отрасли и перспективы дальнейших исследований. Издание предназначено также для преподавателей, студентов и аспирантов, изучающих аддитивное производство, может быть использовано в качестве автономного курса или как модуль в большой программе по технологии производства.

КАК ЗАКАЗАТЬ НАШИ КНИГИ?

125319, Москва, а/я 91; тел.: +7 495 234-0110; факс: +7 495 956-3346; e-mail: knigi@technosfera.ru; sales@technosfera.ru